



The
Robert E. Gross
Collection

A Memorial to the Founder
of the


*Lockheed Aircraft
Corporation*

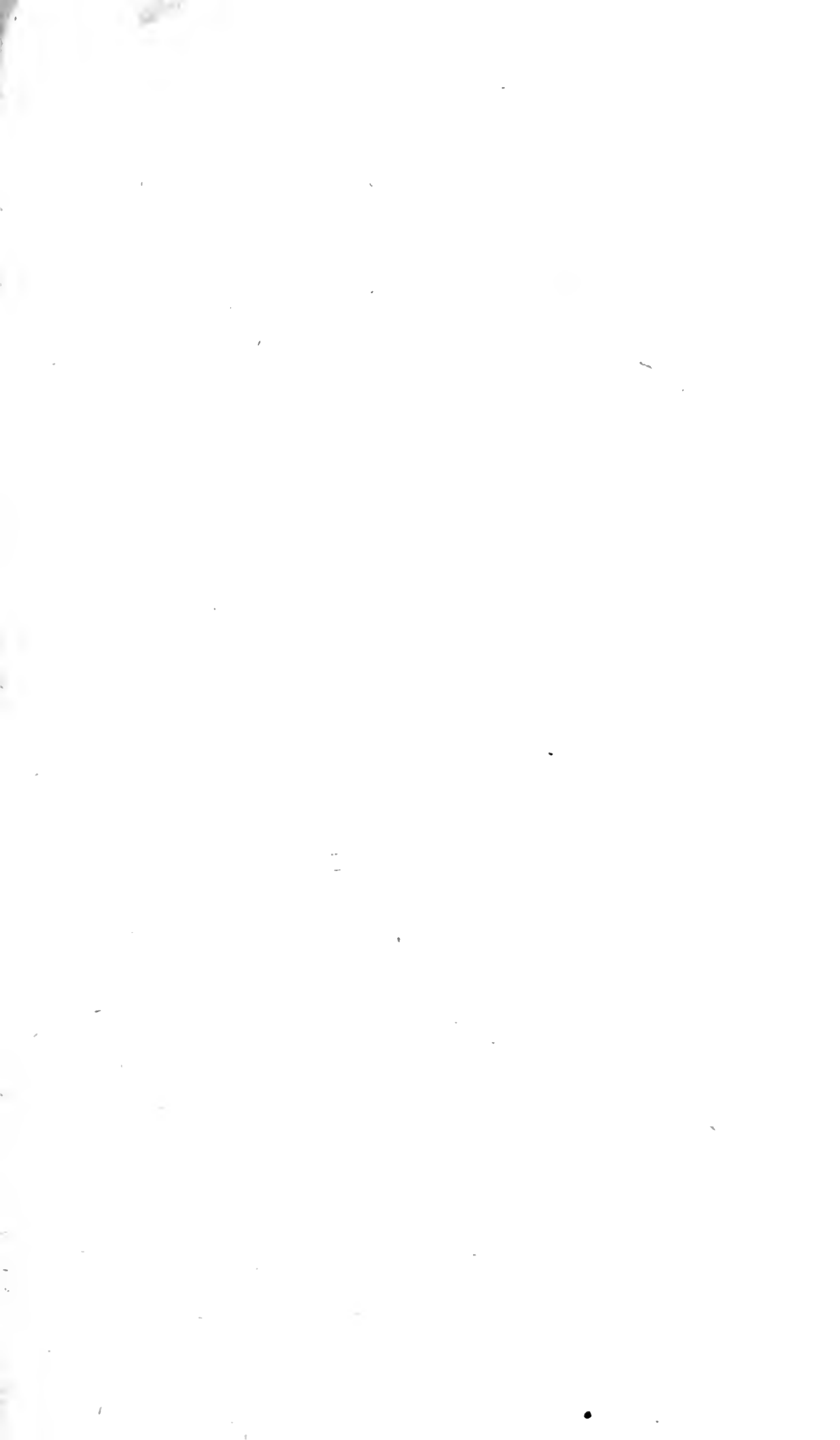


Business Administration Library

University of California

Los Angeles







E L E M E N S

D E

G E O M E T R I E .

Handwritten scribbles at the top of the page, possibly including the number '2'.

E L E M E N S D E G E O M E T R I E .

*Par M. CLAIRAUT, de l'Académie
Royale des Sciences, & de la Société
Royale de Londres.*

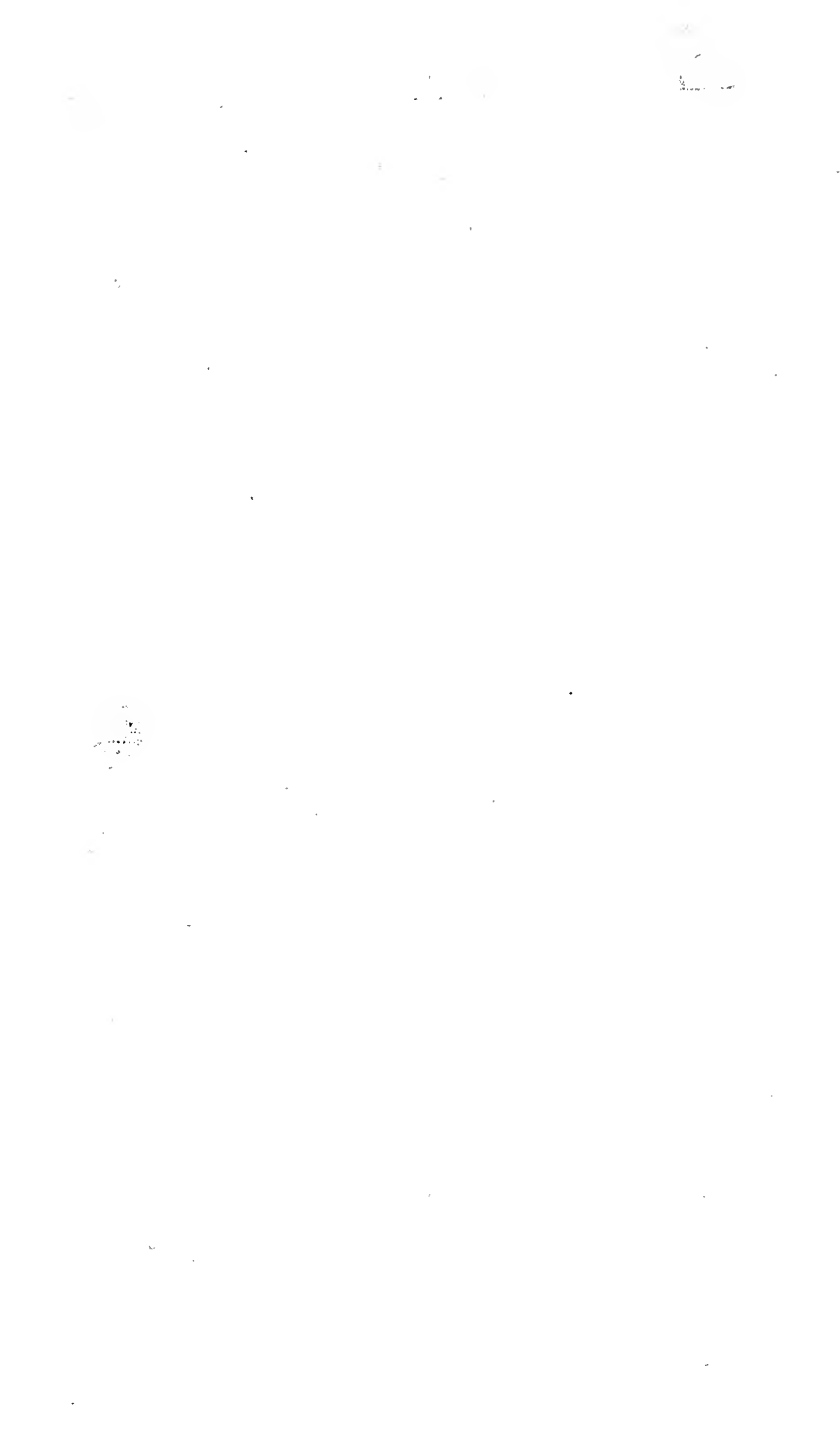


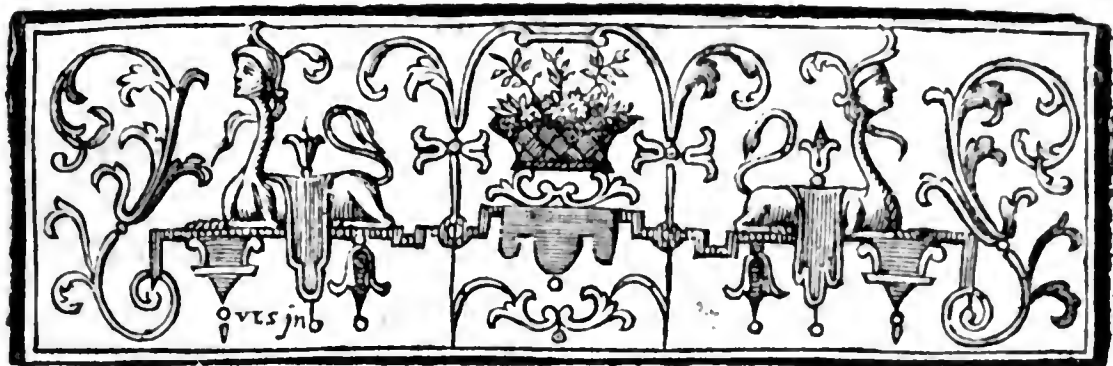
A P A R I S ;

Chez LAMBERT & DURAND, Libraires,
ruë Saint-Jacques, au Grifon.

M D C C X L I .

Avec Approbation & Privilège du Roi.





A MONSEIGNEUR
LE COMTE
DE MAUREPAS,
MINISTRE
ET SECRETAIRE D'ETAT,
COMMANDEUR DES ORDRES
DU ROY.



ONSEIGNEUR,

*C'est peut-être oublier la supériorité
de vos connoissances , que de vous*

E P I T R E.

présenter des Elémens de Géométrie; mais c'est connoître vos vûes que de vous offrir quelque chose d'utile.

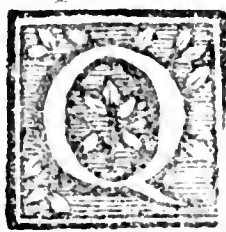
Je ne dois donc point appréhender de mettre sous votre protection un Ouvrage qui contient les principes d'une Science dont vous partagez nécessairement les succès. Je vous supplie très-humblement, MONSEIGNEUR, de l'accepter, comme un hommage de ma reconnoissance, & comme une preuve du profond respect avec lequel je suis,

MONSEIGNEUR,

Votre très-humble & très-obéissant
Serviteur CLAIRAUT.



P R E F A C E.



U O I Q U E la Géométrie soit par elle-même abstraite, il faut avouer cependant que les difficultés qu'éprouvent ceux qui commencent à s'y appliquer, viennent le plus souvent de la manière dont elle est enseignée dans les Elémens ordinaires. On y débute toujours par un grand nombre de définitions, de demandes, d'axiomes, & de principes préliminaires, qui semblent ne promettre rien que de sec

★

au Lecteur. Les propositions qui viennent ensuite ne fixant point l'esprit sur des objets plus intéressans , & étant d'ailleurs difficiles à concevoir , il arrive communément que les Commençans se fatiguent & se rebutent , avant que d'avoir aucune idée distincte de ce qu'on vouloit leur enseigner.

Il est vrai que pour sauver cette sécheresse , naturellement attachée à l'étude de la Géométrie , quelques Auteurs ont imaginé de mettre à la suite de chaque proposition essentielle , l'usage qu'on en peut faire pour la pratique ; mais par-là ils prouvent l'utilité de la Géométrie , sans faciliter beaucoup les moyens de l'apprendre. Car chaque proposition venant

toûjours avant son usage, l'esprit ne revient à des idées sensibles, qu'après avoir essuyé la fatigue de saisir des idées abstraites.

Quelques réflexions que j'ai faites sur l'origine de la Géométrie, m'ont fait espérer d'éviter ces inconvéniens, en réunissant les deux avantages d'intéresser & d'éclairer les Commençans. J'ai pensé que cette Science, cōme toutes les autres, devoit s'être formée par degrés; que c'étoit vraisemblablement quelque besoin qui avoit fait faire les premiers pas, & que ces premiers pas ne pouvoient pas être hors de la portée des Commençans, puisque c'étoient des Commençans qui les avoient faits.

Prévenu de cette idée, je me

Je suis proposé de remonter à ce qui pouvoit avoir donné naissance à la Géométrie ; & j'ai tâché d'en développer les principes , par une méthode assez naturelle , pour être supposée la même que celle des premiers Inventeurs ; observant seulement d'éviter toutes les fausses tentatives qu'ils ont nécessairement dû faire.

La mesure des Terrains m'a paru ce qu'il y avoit de plus propre à faire naître les premières propositions de Géométrie ; & c'est , en effet , l'origine de cette Science , puisque Géométrie signifie *mesure de Terrain*. Quelques Auteurs prétendent que les Egyptiens , voyant continuellement les bornes de leurs Hérita-

ges détruites par les débordemens du Nil, jettèrent les premiers fondemens de la Géométrie, en cherchant les moyens de s'affûrer exactement de la situation de l'étendue & de la figure de leurs domaines. Mais quand on ne s'en rapporteroit pas à ces Auteurs, du moins ne sçauroit-on douter que dès les premiers temps, les hommes n'ayent cherché des méthodes pour mesurer & pour partager leurs Terres. Voulant dans la suite perfectionner ces méthodes, les recherches particulieres les conduisirent, peu à peu, à des recherches générales; & s'étant enfin proposé de connoître le rapport exact de toutes sortes de grandeurs, ils formèrent une Science

d'un objet beaucoup plus vaste ; que celui qu'ils avoient d'abord embrassé , & à laquelle ils conserverent cependant le nom qu'ils lui avoient donné dans son origine.

Afin de suivre dans cet Ouvrage une route semblable à celle des Inventeurs , je m'attache d'abord à faire découvrir aux Commencans les principes dont peut dépendre la simple mesure des Terrains , & des distances accessibles ou inaccessibles, &c. De-là je passe à d'autres recherches qui ont une telle analogie avec les premières , que la curiosité naturelle à tous les hommes, les porte à s'y arrêter ; & justifiant ensuite cette curiosité par quelques applications utiles , je parviens à faire parcourir tout ce

que la Géométrie élémentaire a de plus intéressant.

On ne sçauroit disconvenir, ce me semble, que cette méthode ne soit au moins propre à encourager ceux qui pourroient être rebutés par la sécheresse des vérités géométriques, dénuées d'applications; mais j'espère qu'elle aura encore une utilité plus importante, c'est qu'elle accoutumera l'esprit à chercher & à découvrir; car j'évite avec soin de donner aucune proposition sous la forme de théorèmes; c'est-à-dire, de ces propositions, où l'on démontre que telle ou telle vérité est, sans faire voir comment on est parvenu à la découvrir.

Si les premiers Auteurs de

Mathématiques ont présenté leurs découvertes en théorèmes , ç'a été , sans doute , pour donner un air plus merveilleux à leurs productions , ou pour éviter la peine de reprendre la suite des idées qui les avoient conduits dans leurs recherches. Quoi qu'il en soit , il m'a paru beaucoup plus à propos d'occuper continuellement mes Lecteurs à résoudre des problèmes ; c'est-à-dire , à chercher les moyens de faire quelque opération , ou de découvrir quelque vérité inconnue , en déterminant le rapport qui est entre des grandeurs données , & des grandeurs inconnues qu'on se propose de trouver. En suivant cette voie , les Commencans apperçoivent , à chaque

pas qu'on leur fait faire , la raison qui détermine l'Inventeur , & par-là ils peuvent acquérir plus facilement l'esprit d'invention.

On me reprochera peut-être , en quelques endroits de ces Elémens , de m'en rapporter trop au témoignage des yeux , & de ne m'attacher pas assez à l'exactitude rigoureuse des démonstrations. Je prie ceux qui pourroient me faire un pareil reproche , d'observer que je ne passe légèrement , que sur des propositions dont la vérité se découvre pour peu qu'on y fasse attention. J'en use de la sorte , surtout dans les commencemens , où il se rencontre plus souvent des propositions de ce genre , parce que j'ai remarqué que ceux qui

avoient de la disposition à la Géométrie , se plaifoient à exercer un peu leur esprit ; & qu'au contraire , ils se rebutoient , lorsqu'on les accabloit de démonstrations , pour ainsi dire , inutiles.

Qu'Euclide se donne la peine de démontrer , que deux cercles qui se coupent n'ont pas le même centre , qu'un triangle renfermé dans un autre , a la somme de ses côtés plus petite que celle des côtés du triangle dans lequel il est renfermé ; on n'en fera pas surpris. Ce Géomètre avoit à convaincre des Sophistes obstinés , qui se faisoient gloire de se refuser aux vérités les plus évidentes : il falloit donc qu'alors la Géométrie eût , comme la Logique , le secours des

raisonnemens en forme , pour fermer la bouche à la chicanne. Mais les choses ont changé de face. Tout raisonnement qui tombe sur ce que le bon sens seul décide d'avance , est aujourd'hui en pure perte , & n'est propre qu'à obscurcir la vérité , & à dégoûter les Lecteurs.

Un autre reproche qu'on pourroit me faire , ce seroit d'avoir omis différentes propositions , qui trouvent leur place dans les Elémens ordinaires , & de me contenter , lorsque je traite des propositions , d'en donner seulement les principes fondamentaux.

A cela je réponds qu'on trouve dans ce Traité tout ce qui peut servir à remplir mon projet, que

les propositions que je néglige sont celles qui ne peuvent être d'aucune utilité par elles-mêmes, & qui d'ailleurs ne sçauroient contribuer à faciliter l'intelligence de celles dont il importe d'être instruit : Qu'à l'égard des proportions, ce que j'en dis doit suffire pour faire entendre les propositions élémentaires qui les supposent. C'est une matière que je traiterai plus à fond dans les Elémens d'Algèbre, que je donnerai dans la suite.

Enfin, comme j'ai choisi la mesure des Terrains pour intéresser les Commençans, ne dois-je pas craindre qu'on ne confonde ces Elémens avec les Traités ordinaires d'Arpentage ? Cette pensée ne peut venir qu'à ceux qui ne confi-

déreront pas que la mesure des Terrains n'est point le véritable objet de ce Livre, mais qu'elle me sert seulement d'occasion pour faire découvrir les principales vérités géométriques. J'aurois pû de même, remonter à ces vérités, en faisant l'Histoire de la Physique, de l'Astronomie, ou de toute autre partie des Mathématiques que j'aurois voulu choisir ; mais alors la multitude des idées étrangères, dont il auroit fallu s'occuper, auroit comme étouffé les idées géométriques, auxquelles seules je devois fixer l'esprit du Lecteur.



*Extrait des Registres de l'Académie Royale des
Sciences, du 31. Août 1740.*

MESSIEURS DE REAUMUR, DE MAIRAN,
& NICOLE, qui avoient été nommés pour
examiner les *Elémens de Géométrie* de M. CLAIRAUT,
en ayant fait leur rapport, la Compagnie a jugé
que cet Ouvrage méritoit l'impression En foi de
quoi j'ai signé le présent Certificat. A Paris, ce 14.
Décembre 1740.

Signé FONTENELLE, Secrétaire perpétuel
de l'Académie Royale des Sciences.

PRIVILEGE DU ROI.

LOUIS, par la Grace de Dieu, Roi de France &
de Navarre : A nos amez & féaux Conseillers,
les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres
des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand Con-
seil, Prévôt de Paris, Baillifs, Senéchaux, leurs
Lieutenans Civils, & autres nos Justiciers qu'il ap-
partiendra, SALUT. Notre ACADEMIE ROYALE DES
SCIENCES, Nous a très-humblement fait exposer,
que depuis qu'il Nous a plû lui donner, par un Régle-
ment nouveau, de nouvelles marques de notre affec-
tion, elle s'est appliquée avec plus de soin, à culti-
ver les Sciences, qui font l'objet de ses exercices ; en-
forte qu'outre les Ouvrages, qu'elle a déjà donnés au
Public, elle seroit en état d'en produire encore d'au-
tres, s'il Nous plaisoit lui accorder de nouvelles Let-
tres de Privilege, attendu que celles que Nous lui
avons accordées en date du 6. Avril 1693, n'ayant
point eu de terme limité, ont été déclarées nulles par
un Arrêt de notre Conseil d'Etat du 13 Août 1704,
celles de 1713 & celles de 1716 étant aussi expirées :
Et désirant donner à notredite Académie en corps &
en particulier, & à chacun de ceux qui la composent,

toutes les facilités & les moyens qui peuvent contribuer à rendre leurs travaux utiles au Public , Nous avons permis & permettons par ces presentes à notre dite Académie , de faire vendre ou débiter par tous les lieux de notre obéissance , par tel Imprimeur ou Libraire qu'elle voudra choisir , toutes les *Recherches ou Observations journalieres , ou Relations annuelles de tout ce qui aura été fait dans les Assemblées de notre dite Académie Royale des Sciences ; comme aussi les Ouvrages , Mémoires , ou Traités de chacun des Particuliers qui la composent , & généralement tout ce que ladite Académie voudra faire paroître , après avoir fait examiner lesdits Ouvrages , & jugé qu'ils sont dignes de l'impression ;* & ce, pendant le temps & espace de quinze années consecutives , à compter du jour de la date desdites Presentes. Faisons défenses à toutes sortes de personnes de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangere dans aucun lieu de notre obéissance ; comme aussi à tous Imprimeurs, Libraires , & autres, d'imprimer, faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter, ni contrefaire aucun desdits Ouvrages ci-dessus spécifiés , en tout, ni en partie , ni d'en faire aucuns extraits sous quelque prétexte que ce soit, d'augmentation , correction, changement de titre , feuilles mêmes séparées , ou autrement , sans la permission expresse & par écrit de notre dite Académie , ou de ceux qui auront droit d'elle, & ses ayans cause , à peine de confiscation des Exemplaires contrefaits , de dix mille livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, l'autre tiers au Dénonciateur , & de tous dépens , dommages & intérêts ; à la charge que ces Presentes seront enregistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris, dans trois mois de la date d'icelle ; que l'impression desdits Ouvrages sera faite dans notre Royaume , & non ailleurs ; & que notre dite Académie se conformera en tout aux Réglemens de la Librairie , & notamment à celui du 10 Avril 1725. & qu'avant que de les exposer en vente , les Manuscrits ou Imprimés qui auront servi de

copie à l'impression desdits Ouvrages , seront remis dans le même état , avec les Approbations & certificats qui en auront été donnés , ès mains de notre très-cher & féal Chevalier Garde des Sceaux de France , le Sieur Chauvelin ; & qu'il en fera ensuite remis deux Exemplaires de chacun dans notre Bibliothèque publique , un dans celle de notre Château du Louvre , & un dans celle de notre très-cher & féal Chevalier Garde des Sceaux de France , le Sieur Chauvelin : le tout à peine de nullité des Présentes ; du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir notredite Académie, ou ceux qui auront droit d'elle & ses ayans-cause , pleinement & paisiblement , sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement : Voulons que la copie desdites Présentes , qui sera imprimée tout au long au commencement ou à la fin desdits Ouvrages , soit tenue pour dûement signifiée , & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conseillers & Secretaires , foi soit ajoutée comme à l'Original : Commandons au premier notre Huissier ou Sergent , de faire pour l'exécution d'icelles tous actes requis & nécessaires , sans demander autre permission , & nonobstant Clameur de Haro , Chartre Normande , & Lettres à ce contraires : car tel est notre plaisir. DONNE' à Fontainebleau le douzième jour du mois de Novembre l'an de grace mil sept cens trente-quatre , & de notre Regne le vingtième.

Par le Roi en son Conseil. SAÏNSON.

Registré sur le Registre VIII. de la Chambre Royale & Syndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris , N . 792. Fol. 775. conformément au Règlement de 1723. qui fait défense , Art. IV. à toutes personnes de quelque qualité qu'elles soient , autres que les Libraires & Imprimeurs , de vendre , débiter & faire afficher aucuns Livres , pour les vendre en leur nom , soit qu'ils s'en disent les Auteurs , ou autrement , & à la charge de fournir les Exemplaires prescrits par l'Art. CVIII. du même Règlement . A Paris le 15. Novembre 1734.

G. MARTIN , Syndic.

E L E M E N S



E L E M E N S

D E

G E O M E T R I E .

P R E M I E R E P A R T I E .

*Des moyens qu'il étoit le plus naturel
d'employer pour parvenir à la
mesure des Terrains.*



E qu'il semble qu'on a dû
mesurer d'abord, ce sont les
longueurs & les distances.

I.

P O U R mesurer une longueur quel-
conque, l'expédient que fournit une

A

forte de Géométrie naturelle, c'est de comparer la longueur d'une mesure connue à celle de la longueur qu'on veut connoître.

I I.

A l'égard de la distance, on voit que pour mesurer celle qui est entre deux points, il faut tirer une ligne droite de l'un à l'autre, & que c'est sur cette ligne qu'il faut porter la mesure connue, parce que toutes les autres faisant nécessairement un détour plus ou moins grand, sont plus longues que la ligne droite qui n'en fait aucun.

La ligne droite est la plus courte d'un point à un autre, & par conséquent la mesure de la distance entre deux points.

I I I.

O U T R E la nécessité de mesurer la distance d'un point à un autre, il arrive souvent qu'on est encore obligé de mesurer la distance d'un point à une ligne. Un homme, par exemple, placé en D sur le bord d'une riviere, se propose de sçavoir combien il y a du lieu

PLANCHE
premiere.

FIG. 1.

où il est à l'autre bord AB. Il est clair que, dans ce cas, pour mesurer la distance cherchée, il faut prendre la plus courte de toutes les lignes droites DA, DB, &c. qu'on peut tirer du point D à la droite AB. Or cette ligne, la plus courte dont on a besoin, il est aisé de voir que c'est la ligne DC, qu'on suppose ne pancher ni vers A, ni vers B. C'est donc sur cette ligne, à laquelle on a donné le nom de perpendiculaire, qu'il faut porter la mesure connue, pour avoir la distance DC, du point D, à la droite AB. Mais on voit aussi que pour poser cette mesure sur la ligne DC, il faut que cette ligne soit préalablement tirée. Il étoit donc nécessaire qu'on eût une méthode pour tracer des perpendiculaires.

Une ligne qui tombe sur une autre, sans pancher sur elle d'aucun côté, est perpendiculaire à cette ligne.

IV.

ON avoit encore besoin d'en tracer dans une infinité d'autres occasions. On sçait, par exemple, que la régu-

FIG 2. & 3. larité des figures telles que ABCD, FGHI, appellées rectangles, & composées de quatre côtés perpendiculaires les uns aux autres, engage à donner leurs formes aux maisons, à leurs dedans, aux jardins, aux chambres, aux pans de murailles, &c.

Le rectangle est une figure de quatre côtés perpendiculaires les uns aux autres.

Et le carré est un rectangle dont les quatre côtés sont égaux.

La première ABCD de ces figures, dont les quatre côtés sont égaux, s'appelle communément carré. L'autre FGHI, qui n'a que ses côtés opposés égaux, retient le nom de rectangle.

V.

DANS les différentes opérations qui demandent qu'on mène des perpendiculaires, il s'agit, ou d'en abaisser sur une ligne, d'un point pris au-dehors, ou d'en élever d'un point placé sur la ligne même.

FIG. 4. Que du point C, pris dans la ligne AB, on veuille élever la ligne CD, perpendiculaire à AB; il faudra que cette ligne ne panche ni vers A, ni vers B.

Maniere d'élever une perpendiculaire.

Supposant donc d'abord que C soit à égale distance de A & de B, & que la droite CD ne panche d'aucun côté, il est clair que chacun des points de cette ligne sera également éloigné de A & de B; il ne s'agira donc plus que de trouver un point quelconque D, tel que sa distance au point A soit égale à sa distance au point B: car alors tirant par C, & par ce point une ligne droite CD, cette ligne sera la perpendiculaire demandée.

Pour avoir le point D, on pourroit le chercher en tâtonnant; mais le tâtonnement ne satisfait pas l'esprit, il veut une méthode qui l'éclaire. La voici.

Prenez une commune mesure, une corde, par exemple, ou un compas d'une ouverture déterminée, suivant que vous travaillerez, ou sur le terrain, ou sur le papier.

Cette mesure prise, vous fixerez au point A, ou l'extrémité de la corde,

ou la pointe du compas, & , faisant tourner l'autre pointe, ou l'autre extrémité de la corde, vous tracerez l'arc PDM. Puis, sans changer de mesure, vous opererez de même par rapport au point B, & vous décrirez l'arc QDN, qui, coupant le premier au point D, donnera le point cherché.

Car puisque le point D appartiendra également aux deux arcs PDM, QDN décrits par le moyen d'une mesure commune, sa distance au point A égalera sa distance au point B. Donc CD ne panchera, ni vers A, ni vers B. Donc cette ligne fera perpendiculaire sur AB.

FIG. 5. Si le point C ne se trouve pas à égale distance de A & de B, il faut prendre deux autres points *a* & *b*, également éloignés de C, & s'en servir, à la place de A & de B, pour décrire les arcs PDM, QDN.

V I.

FIG. 4. SI une des traces, telle que PDM,

étoit continuée en O, en E, en R, &c. jusqu'à ce qu'elle revint au même point P, la trace entière s'appelleroit circonférence de cercle, ou simplement cercle.

Le cercle est la trace entière que décrit la pointe mobile d'un compas pendant qu'elle tourne autour de l'autre pointe.

Qu'on ne trace qu'une partie PDM de la circonférence, cette partie sera appelée arc de cercle.

Le point fixe A son centre, ou celui du cercle.

Le centre est le lieu de la pointe fixe.

Et l'intervalle AD, son rayon.

Le rayon est l'intervalle dont le compas est ouvert.

Toute ligne, comme DAE, qui passe par le centre A, & qui se termine à la circonférence, est appelée diamètre; il est évident que cette ligne est double du rayon, ce qui fait que le rayon est quelquefois nommé demi-diamètre.

Le diamètre est le double du rayon.

VII.

LA manière d'élever une perpendiculaire sur une ligne AB, fournit celle d'en abaisser une d'un point quelconque E, pris hors de cette ligne; car, plaçant en E, ou l'extrémité d'un fil,

FIG. 6.
Manière d'abaisser une perpendiculaire.

ou la pointe du compas , & d'un même intervalle $E b$, marquant deux points a & b sur la ligne AB , on cherchera , comme dans l'article précédent , un autre point D , dont la distance , au point a & au point b , soit la même , & par ce point & par E , on menera la droite DE , qui , ayant chacune de ses extrémités également éloignées de a & de b , & ne panchant pas plus vers l'un de ces points que vers l'autre , sera perpendiculaire sur AB .

VIII.

DE l'opération précédente suit la solution d'un nouveau Problème.

FIG. 7. Couper une ligne en deux parties égales. Qu'il s'agisse de partager une ligne droite AB en deux parties égales ; des points A & B , pris comme centres , & d'une ouverture de compas quelconque , on décrira les arcs REI , GEF , ensuite des mêmes centres , & de la même , ou de telle autre ouverture qu'on voudra , on décrira aussi les arcs

PDM, QDN, alors la ligne ED, qui joindra les points d'intersections E & D, coupera AB en deux parties égales au point C.

IX.

LA maniere de tracer des perpendiculaires étant trouvée, rien n'étoit plus aisé que de s'en servir pour faire ces figures qu'on appelle rectangles, & quarrés, dont on a parlé dans l'Article IV. On voit que pour faire un quarré ABCD, dont les côtés soient égaux à la ligne donnée K, il faut prendre sur la droite GE, un intervalle AB, égal à K, puis élever (Article V.) aux points A & B, les perpendiculaires AD, BC, chacune égale à K, ensuite tirer DC.

FIG. 2.

Faire un quarré ayant son côté.

X.

SI on vouloit tracer un rectangle FGHI, dont la longueur fut K, & la largeur L, on feroit FG égale à K, ensuite on éleveroit les perpendiculai-

FIG. 3.

Faire un rectangle, dont la longueur & la largeur sont données.

res FI & GH, chacune égale à L, puis on tireroit HI.

X I.

DANS la construction des ouvrages, comme remparts, canaux, ruës, &c.

Les parallèles sont des lignes toujours également distantes les unes des autres.

on a besoin de mener des lignes parallèles; c'est-à-dire, des lignes dont la position soit telle que leurs intervalles ayent par-tout pour mesure des perpendiculaires de même longueur. Or pour mener ces parallèles, rien, ce semble, n'est plus naturel que de recourir à la

FIG. 8.

méthode dont on se sert pour tracer des rectangles. Que AB, par exemple, soit un des côtés ou de quelque canal, ou de quelque rempart, &c. auquel on voudra donner la largeur CA; ou pour énoncer la question d'une manière plus géométrique & plus générale, supposons qu'on veuille mener par C, la parallèle CD à AB, on prendra, à volonté, un point B dans la ligne AB, & l'on opérera de la même façon que

Mener une parallèle à une ligne par un point donné.

si, ayant la base AB, on vouloit faire un rectangle ABCD, qui eût AC pour hauteur. Alors les lignes CD, AB, étant prolongées à l'infini, seroient toujours parallèles, ou, ce qui revient au même, elles ne se rencontreroient jamais.

XII.

LA régularité des figures rectangulaires les faisant souvent employer, comme nous avons déjà dit, il se trouve bien des cas où l'on a besoin de connoître leur étendue. Il s'agira, par exemple, de déterminer combien il faut de tapisserie pour une chambre, ou combien un enclos de maison, ayant la forme d'un rectangle, doit contenir d'arpens, &c.

On sent que pour parvenir à ces sortes de déterminations, le moyen le plus simple & le plus naturel, est de se servir d'une mesure commune, qui, appliquée plusieurs fois sur la surface à

mesurer, la couvre toute entière. Méthode qui revient à celle dont on s'est déjà servi pour déterminer la longueur des lignes.

Or il est évident que la mesure commune des surfaces, doit être elle-même une surface, par exemple, celle d'une toise quarrée, d'un pied quarré, &c. Ainsi, mesurer un rectangle, c'est déterminer le nombre de toises quarrées, ou de pieds quarrés, &c. que contient sa surface.

FIG. 9. Prenons un exemple, pour soulager l'esprit. Supposons que le rectangle donné ABCD, ait 7 pieds de haut sur une base de 8 pieds, on pourra regarder ce rectangle comme partagé en 7 bandes, *a, b, c, d, e, f, g*, qui contiendront chacune 8 pieds quarrés; la valeur du rectangle sera donc 7 fois 8 pieds quarrés, ou 56 pieds quarrés.

Maintenant si on se rappelle les premiers élémens du calcul arithmétique, & qu'on se souvienne que multiplier

deux nombres, c'est prendre l'un autant de fois que l'unité est contenuë dans l'autre ; on trouvera une parfaite analogie entre la multiplication ordinaire , & l'opération par laquelle on mesure le rectangle. On verra qu'en multipliant le nombre des toises, ou des pieds , &c. que donne sa hauteur , par le nombre des toises ou des pieds , &c. que donne sa base , on déterminera la quantité de toises quarrées , ou de pieds quarrés , &c. que contient sa superficie.

La mesure d'un rectangle est le produit de sa hauteur par sa base.

XIII.

LES figures qu'on a à mesurer, ne sont pas toujours régulières ; comme les rectangles ; cependant on a souvent besoin d'avoir leur mesure , tantôt il s'agira de déterminer l'étendue d'un ouvrage construit sur un terrain qui manquera de régularité ; tantôt on voudra sçavoir ce qu'une terre irrégulièrement bornée contiendra d'arpens ; il étoit donc nécessaire qu'à la méthode de

déterminer l'étendue des rectangles ; on ajoutât celle de mesurer les figures qui ne sont pas rectangulaires.

Les figures rectilignes sont celles que terminent des lignes droites.

FIG. 10.

On voit d'abord, que pour la pratique, la difficulté ne tombe que sur la mesure des figures rectilignes, telles que ABCDE, c'est-à-dire, des figures terminées par des lignes droites ; car

que, dans le contour d'un terrain, il se trouve quelques lignes courbes, comme dans la figure ABCDEFG, il est

FIG. 11.

évident que ces lignes, partagées en autant de parties qu'il sera nécessaire pour éviter toute erreur sensible, pourront toujours être prises pour un assemblage de lignes droites.

Cela posé, on voit que, malgré l'infinie variété des figures rectilignes, on peut les mesurer toutes de la même façon, en les partageant en figures de trois côtés nommées communément triangles ; ce qu'on fera de la manière la plus simple & la plus commode, si, d'un point quelconque A du contour

Le triangle est une figure terminée par trois lignes droites.

de la figure ABCDE , on mène les lignes droites AC , AD , &c. aux points C , D , &c.

FIG. 10.

XIV.

IL ne s'agira donc plus que d'avoir la mesure des triangles qu'on aura formés. Or on sçait que pour trouver ce qu'on ignore , le moyen le plus sûr est de chercher si dans ce qu'on connoît , rien ne se rapporteroit à ce qu'on veut connoître ; mais on a déjà vû que tout rectangle ABCD , est égal au produit de sa base AB par sa hauteur CB. D'ailleurs , il est aisé de s'appercevoir que cette figure coupée transversalement par la ligne AC , nommée diagonale , se trouve partagée en deux triangles égaux , & de-là on infère que chacun de ces triangles égalera la moitié du produit de leur base AB ou DC , par leur hauteur CB ou DA.

FIG. 12.

La Diagonale d'un rectangle est la ligne qui le partage en deux triangles égaux.

Il est vrai qu'il n'arrive guères que les triangles à mesurer , ayent deux de

Les triangles rectangles sont ceux qui ont deux de leurs côtés perpendiculaires l'un à l'autre.

leurs côtés perpendiculaires l'un à l'autre, comme les triangles ABC, ADC, qu'on appelle triangles rectangles; mais rien n'empêche qu'on ne les réduise tous à des triangles de cette espèce.

PL. II.

FIG. I.

CAR que du point A, sommet d'un triangle quelconque ABC, on abaisse la perpendiculaire AD, sur la base BC, le triangle ABC se trouvera partagé en deux triangles rectangles ABD, ADC.

Un triangle est la moitié, du rectangle qui a même base, & même hauteur.

Reprenant donc ce qui vient d'être dit, il est évident que comme les deux triangles ABD, ADC feront les moitiés des rectangles AEBD, ADCF, le triangle proposé ABC, fera, de même, la moitié du rectangle EBCF, qui aura BC pour base, & AD pour hauteur: mais puisque la surface du rectangle EBCF égalera le produit de la hauteur EB ou AD par la base BC, le triangle ABC aura pour mesure la moitié du produit de la base BC par la perpendiculaire AD, hauteur du triangle.

Donc sa mesure est la moitié du produit de la hauteur par sa base.

On a donc la manière de mesurer

tous

tous les terrains terminés par des lignes droites, puisqu'il ne s'en trouve aucun qu'on ne puisse réduire à des triangles, & que des sommets de ces triangles, on sçait abaisser des perpendiculaires sur leurs bases.

XV.

DE ce que dans la méthode que nous venons de donner, pour mesurer l'aire, ou la superficie des triangles, on n'employe que leur base & leur hauteur, sans égard à la longueur de leurs côtés, on tire cette proposition, ou ce théorème, que tous les triangles, tels que ECB, ACB, qui ont une base commune CB, & dont les hauteurs EF, AD, sont égales, ont la même superficie.

FIG. 2.

Les triangles qui ont même hauteur & même base, ont des superficies égales.

XVI.

POUR faciliter l'intelligence du principe qui donne la mesure des triangles, nous avons crû ne devoir

B

choisir pour base qu'un côté sur lequel pourroit tomber la perpendiculaire abaissée du sommet opposé, ce qu'on a toujours la liberté de faire, quand il ne s'agit que de la mesure des terrains.

Mais parce que dans la comparaison des triangles qui ont même base, les perpendiculaires abaissées de leurs sommets peuvent tomber hors du triangle, comme dans la figure 3. il semble qu'il soit nécessaire de voir si les triangles,

FIG. 3.

tels que BCG sont dans le cas des autres; c'est-à-dire, s'ils sont toujours moitiés des rectangles ECBF, qui ont la perpendiculaire GH pour hauteur.

Mais c'est de quoi il est aisé de s'assurer, en remarquant que le triangle CGH, somme des deux triangles CGB, GBH, est la moitié du rectangle ECHG, somme des deux rectangles ECBF, FBHG, & qu'ainsi les deux triangles CGB, GBH, pris ensemble, valent la moitié du rectangle ECHG: or le triangle GBH, est la moitié du

rectangle FBHG ; donc le triangle proposé BCG, est la moitié de de l'autre rectangle ECBF, qui a BC pour base, & GH pour hauteur.

XVII.

LA proposition démontrée dans les trois articles précédens, peut encore s'énoncer généralement en ces termes : les triangles EBC, ABC, GBC, sont égaux, lorsqu'ils ont une base commune BC, & qu'ils sont entre les mêmes parallèles EAG, CBH ; c'est-à-dire, lorsque leurs sommets E, A, G, se trouvent dans une même ligne droite EAG, parallèle à la droite CB. Car alors (Article XI.) leurs hauteurs, mesurées par les perpendiculaires EF, AD, GH, sont les mêmes.

FIG. 4.

Les triangles qui ont même base, & qui sont renfermés entre les mêmes parallèles, sont égaux en superficie.

XVIII.

Entre les différentes figures rectilignes qu'on sçait mesurer par la méthode précédente, il y en a qui approchent

FIG. 5.

de la regularité des rectangles, ce sont des espaces tels que ABCD, terminés par quatre côtés, dont chacun est parallele au côté qui lui est opposé. Ces

Les Parallelogrammes sont des figures de quatre côtés, dont les deux opposés sont paralleles.

figures sont appellées Parallelogrammes ; elles sont plus aisées à mesurer que les autres figures rectilignes, les rectangles exceptés. Car qu'on partage

le parallelogramme ABCD, en deux triangles ABC, ACD, ces deux triangles seront visiblement égaux : or comme chacun de ces triangles vaudroit la moitié du produit de la hauteur AF, par la base BC, le parallelogramme aura pour mesure le produit entier de la base BC par la hauteur AF.

On les mesure en multipliant leur hauteur par leur base.

XIX.

FIG. 6. ou 7. DE-là il suit, que tous les parallelo-

Les Parallelogrammes qui ont une base commune, & qui sont entre les mêmes paralleles, sont égaux en superficie.

grammes ABCD, EBCF, qui auront une base commune, & qui se trouveront entre les mêmes paralleles, seront égaux ; ce qu'il est aisé de voir, même indépendamment de ce qui précède,

en remarquant que le parallelogramme ABCD deviendra le parallelogramme EBCF ; si on lui ajoûte le triangle DCF , & que , de la figure entiere ABCF, on retranche le triangle ABE ; qu'ainsi les deux triangles DCF , ABE, supposés égaux , il fera évident que le parallelogramme ABCD n'aura point changé d'étendue en devenant EBCF. Or, pour s'affurer de l'égalité de ces deux triangles , il suffira d'observer que AB & CD étant paralleles , aussi-bien que BE & CF , le triangle ABE ne sera autre chose que le triangle DCF , qui aura glissé sur sa base , de maniere que le point A sera arrivé en D , & E en F.

X X.

IL y a encore d'autres figures rectilignes qu'il est aisé de mesurer , & qu'on nomme Poligones reguliers , figures que terminent des côtés égaux , qui ont tous la même inclinaison les uns

Les Poligones reguliers sont des figures que terminent des côtés égaux , & également

inclinés les
uns sur les au-
tres.

sur les autres. Telles sont les figures
ABDEF, ABDEFG, ABDEFGH*.

* FIG. 8,
9, & 10.

Comme on a coutume de donner la
forme symétrique de ces figures, aux
bassins, aux fontaines, aux places pu-
bliques, &c. je crois qu'avant que
d'apprendre à les mesurer, il faut voir
de quelle manière on les trace.

X X I.

Manière de
décrire un
Poligone d'un
nombre dé-
terminé de
côtés.

QU'ON décrive une circonférence
de cercle, qu'on la partage en autant
de parties égales qu'on voudra donner
de côtés au poligone; qu'ensuite on
mène les lignes AB, BD, DE, &c.
par les points A, B, D, E, &c. qui parta-
geront la circonférence, on aura le po-
ligone cherché, qu'on nommera, ou

Le Penta-
gone a 5. cô-
tés, l'Exago-
ne 6, l'Epta-
gone 7, l'Oc-
togone 8,
l'Enneagone
9, le Deca-
gone 10, &c.

pentagone, ou exagone, ou eptagone,
ou octogone, ou enneagone, ou dé-
cagone, &c. suivant qu'il aura, ou
cinq, ou six, ou sept, ou huit, ou
neuf, ou dix, &c. côtés.

XXII.

P O U R avoir la mesure d'un polygone régulier, on pourroit employer la méthode qu'on a déjà donnée (Article XIII.) pour toutes les figures rectilignes ; mais on s'apperçoit aisément que le plus court est de partager le polygone en triangles égaux, qui ayent tous le centre C pour sommet. Car prenant un de ces triangles, CBD par exemple, & tirant sur la base BD, la perpendiculaire CK, qui, pour lors sera nommée l'apothème du polygone, comme l'aire du triangle vaudra le produit de la base BD, par la moitié de CK, ce produit, pris autant de fois que le polygone aura de côtés, donnera l'aire de la figure entiere.

Mesure de la surface d'un Polygone régulier.

FIG. 10.

L'apothème est la perpendiculaire abaissée du centre de la figure sur un de ses côtés.

XXI.

Q U' O N ne partageât la circonférence du cercle qu'en trois parties égales, on formeroit un triangle nommé

B iiiij

Le triangle
Équilatéral est
celui dont les
trois côtés
sont égaux.

communément Triangle équilatéral ; qu'on partageât cette circonférence en quatre parties égales , on formeroit un quarré ; mais ces deux figures, les plus simples de tous les polygones, peuvent aisément se tracer, sans qu'il soit nécessaire d'avoir recours à la division du cercle ; c'est ce qu'on a déjà vû (Art. IX.) pour le quarré. A l'égard du triangle équilatéral , il est aisé de s'appercevoir que pour le décrire sur une base donnée AB, il faut que des points A & B, comme centres, & d'une ouverture de compas égale à AB, on trace les arcs DCF & GCH, qu'ensuite des points A & B on mène les lignes AC, BC, au point C, section commune des deux arcs DCF, GCH, & sommet du triangle.

Maniere de
le décrire.

FIG. II.

XXIV.

A la méthode de décrire géométriquement le triangle équilatéral & le quarré, les premiers de tous les polygones, je pourrois joindre celle de tra-

cher géométriquement un pentagone, comme plusieurs Auteurs l'ont fait dans les Elémens qu'ils nous ont donnés ; mais parce que les Commençans, pour qui seuls nous travaillons ici, n'apercevraient qu'avec peine la route qu'a dû suivre l'esprit, en cherchant la maniere de tracer cette figure ; route que l'Algèbre nous met à portée de découvrir, nous nous croyons obligés de renvoyer la description du pentagone au *Traité* qui suivra celui-ci, & dans lequel on joindra cette description à celle de tous les autres polygones qui auront un plus grand nombre de côtés, & qui, sans le secours de l'Algèbre, ne pourroient être décrits géométriquement.

Des polygones qui ont plus de cinq côtés, & que je dis ne pouvoir être décrits que par le moyen du calcul algébrique, il en faut excepter ceux de 6, de 12, de 24, de 48, &c. côtés, & ceux de 8, de 16, de 32, de 64, &c. côtés, qu'on peut aisément décrire par

les méthodes que fournit la Géométrie élémentaire , comme on le verra à la fin de cette première Partie.

X X V.

JE reviens à la mesure des Terrains ; & je vois que ceux qu'on veut mesurer , sont souvent tels qu'ils se refusent aux opérations que prescrivent les méthodes précédentes.

FIG. 12. Je suppose que $ABCDE$ soit la figure d'un champ , d'un enclos , &c. dont on voudra avoir la mesure. Suivant ce qu'on a vû , il faudroit partager $ABCDE$ en triangles tels que ABC , ACD , ADE ; ensuite mesurer ces triangles , après avoir abaissé les perpendiculaires EF , CH , BG : mais que dans l'espace $ABCDE$, il se trouve quelque obstacle , une élévation par exemple , un bois , un étang , &c. qui empêche qu'on ne mène les lignes dont on aura besoin , que faudra-t-il faire alors ? quelle méthode faudra-t-il suivre

pour remédier à l'inconvénient du terrain? Celle qui se présente d'abord à l'esprit, c'est de choisir quelque terrain plat, sur lequel on puisse aisément opérer, & de décrire sur ce terrain des triangles égaux, & semblables aux triangles ABC, ACD, &c. Voyons comment on s'y prendra, pour former les nouveaux triangles.

XXVI.

COMMENÇONS par supposer que PL. III.
 l'obstacle se trouve dans l'intérieur du FIG. I.
 triangle ABC, dont les côtés seront Connoissant
 connus, & qu'on veuille tracer un les trois côtés d'un triangle, faire un autre triangle qui lui soit égal.
 triangle égal & semblable sur le terrain choisi; d'abord on décrira une ligne DE égale au côté AB, ensuite FIG. I. & 2.
 prenant une corde de la longueur BC, & fixant une de ses extrémités en E, on décrira l'arc IFG, qui aura la corde pour rayon; & par le moyen d'une autre corde, prise égale à AC, & dont on attachera pareillement un des bouts

en D , on tracera l'arc KFH , qui coupera le premier au point F ; alors menant les lignes DF & FE , on aura un triangle DEF , égal & semblable au triangle proposé ABC ; ce qui est évident : car les côtés DF & EF , qui s'uniront au point F , étant respectivement égaux aux côtés AC & BC , unis au point C , & la base DE ayant été prise égale à AB , il ne seroit pas possible que la position des lignes DF & EF sur DE , fût différente de la position des lignes AC & BC sur AB . Il est vrai qu'on pourroit prendre les lignes Df , Ef , au dessous de DE ; mais le triangle se retrouveroit encore le même , il seroit simplement renversé.

X X V I I .

FIG. 3. SI on ne pouvoit mesurer que deux des trois côtés du triangle ABC , les deux côtés AB , BC , par exemple ; il est clair qu'avec cela seul , on ne pour-

roit pas déterminer un second triangle égal & semblable à ABC. Car quoi-
 qu'on eût pris DE, égal à BC, & DF, égal à BA, on ne sçauroit quelle position donner à celle-ci, relativement à l'autre. Pour lever cette difficulté, la ressource qui se présente est simple : on fait pancher DF, de la même manière sur DE, que AB panche sur BC ; ou, pour s'exprimer comme les Géomètres, on donne à l'angle FDE la même ouverture qu'à l'angle ABC.

FIG. 3. & 4.

Un angle est l'inclinaison d'une ligne sur une autre.

XXVIII.

POUR faire cette opération, on prend un instrument tel que *abc*, composé de deux règles qui puissent tourner autour de *b*, & l'on pose ces règles sur les côtés AB, & BC. Par-là elles font entr'elles le même angle que les côtés AB & BC. Plaçant donc la règle *bc* sur la base DE, de manière que le centre *b* réponde au point D, & que

Manière de faire un angle égal à un autre.

l'ouverture de l'instrument reste toujours la même, la règle ab donnera la position de la ligne DF , qui fera, avec la ligne DE , l'angle FDE , égal à l'angle ABC . Or la ligne DF aura été prise de même longueur que BA . Donc il ne s'agira plus que de mener par F & par E la droite FE , pour avoir le triangle FED entièrement égal, & semblable au triangle ABC . Pratique simple, qui suppose ce principe évident, qu'un triangle est déterminé par la longueur de deux de ses côtés, & par leur ouverture; ou, ce qui revient au même, qu'un triangle est égal à un autre, lorsque deux de leurs côtés sont respectivement égaux, & que l'angle compris entre ces côtés est également ouvert.

Deux côtés,
& l'angle
compris,
étant don-
nés, le trian-
gles est dé-
terminé.

XXIX.

ON pourroit encore faire l'angle FDE égal à l'angle ABC , de la manière suivante.

FIG. 5.
& 6.

Du centre B , & d'un intervalle quelconque Ba , décrivez un arc abc ; ensuite du centre D , & du même intervalle, tracez l'arc eif ; alors vous n'aurez plus qu'à chercher un point f , qui soit placé sur l'arc eif de la même manière que a , se trouvera placé sur l'arc cha . Or vous trouverez facilement le point f , en vous servant de la droite ac , qui, suivant la définition ordinaire, se nommera la corde de l'arc abc .

Seconde manière de faire un angle égal à un autre.

La corde d'un arc de cercle, est la droite que terminent les deux extrémités de l'arc.

Car si, du centre e , & d'un intervalle égal à ac , vous décrivez l'arc lfk , l'intersection des deux arcs eif , lfk , vous donnera le point cherché f .

Tirez ensuite par D & par f , la ligne DfF , vous aurez l'angle FDE égal à l'angle ABC . Ce qui est évident (Article XXVI.) puisque les triangles Bac , Dfe , seront entièrement égaux, & semblables dans toutes leurs parties.

XXX.

LORSQU'ON veut faire le triangle

FIG. 3. & 4. FDE égal au triangle ABC, s'il arrive qu'on ne puisse mesurer qu'un des côtés, BC par exemple, on a recours aux angles ABC & ACB. Ayant fait DE égal à BC, on place les lignes FD & FE, de manière qu'elles fassent, avec DE, les mêmes angles que AB & AC font avec BC : alors, par la rencontre de ces lignes, on a le triangle FDE égal & semblable au triangle ABC. Le principe que suppose cette opération, est de lui-même si simple, qu'il n'a pas besoin d'être démontré.

Deux angles & un côté déterminent le triangle.

XXXI.

FIG. 7. SI des trois côtés du triangle ABC, on ne pouvoit mesurer que la base BC, & qu'on sçût d'ailleurs que ce triangle fût isocèle ; c'est-à-dire, que les deux côtés AB & AC, fussent égaux : il est évident qu'il suffiroit de mesurer un des deux angles ABC, ACB ; car alors l'autre lui seroit égal.

Le triangle isocèle est celui qui a deux côtés égaux.

On en voit aisément la raison, si on se

se représente ce qui arriveroit, en supposant que les deux côtés AB, AC, du triangle ABC, fussent d'abord couchés sur BD, & sur CE, prolongemens de la base BC, & qu'ensuite on les relevât pour réunir leurs extrémités au point A; car alors l'égalité de ces deux côtés les empêcheroit de faire plus de chemin l'un que l'autre. Donc étant joints, ils pancheroient également sur la base BC. Donc l'angle ABC seroit égal à l'angle ACB.

Les angles que ces côtés font avec la base, sont égaux entre eux.

XXXII.

POUR revenir à la mesure des Terrains, on verra que quels que soient les obstacles qu'on pourra rencontrer dans leur intérieur, il sera aisé, par la méthode précédente, de transporter sur un terrain libre, tous les triangles qui partageront l'espace qu'on voudra mesurer.

Supposons, par exemple, que vous voulussiez mesurer un bois, dont la figure fût ABCDEFG.

FIG. 8.

C

D'abord vous prendriez un triangle égal à ABC , ce que vous pourriez faire sans entrer dans l'intérieur de ce triangle, en mesurant les deux côtés AB , BC , & l'angle compris CBA .

Ce triangle décrit donneroit l'angle BCA , & la longueur de AC , & comme vous pourriez mesurer le côté extérieur DC , vous auriez dans le triangle CAD , les côtés DC , & CA . Quant à l'angle DCA , vous le trouveriez en prenant d'abord l'angle IKL , égal à l'angle DCB , ensuite l'angle LKO , égal à l'angle BCA , ce qui vous donneroit l'angle restant IKO , égal à l'angle cherché DCA .

FIG. 8.
& 9.

Le triangle ADC , ainsi déterminé par les deux côtés DC & CA , & par l'angle compris DCA , vous connoîtriez de même le triangle DAG , & le reste de la figure.

XXXIII.

LA méthode qu'on vient de donner

pour mesurer les terrains, dans lesquels on ne sçauroit tirer de lignes, fait souvent naître de grandes difficultés dans la pratique. On trouve rarement un espace uni & libre, assez grand pour faire des triangles égaux à ceux du terrain dont on cherche la mesure. Et même quand on en trouveroit, la grande longueur des côtés des triangles, pourroit rendre les opérations très-difficiles : abaïsser une perpendiculaire sur une ligne d'un point qui en est éloigné seulement de 500 toises, ce seroit un ouvrage extrêmement pénible, & peut-être impraticable. Il importe donc d'avoir un moyen qui supplée à ces grandes opérations.

Ce moyen s'offre comme de lui-même. Il vient bientôt dans l'esprit de représenter la figure à mesurer *ABCDE*, par une figure semblable *abcde*, mais

PL. IV.

FIG. 1.

& 2.

plus petite, dans laquelle, par exemple, le côté *ab* soit de 100 pouces, si le côté *AB* est de 100 toises, le côté

Cij

bc de 45 pouces, si BC est de 45 toises, & de conclure ensuite que si l'étendue de la figure réduite $abcde$, est de 60000 pouces quarrés, celle de la figure $ABCDE$ doit être de 60000 toises quarrées.

Mais, avant toutes choses, il faut sçavoir en quoi consiste la ressemblance de deux figures.

XXXIV.

En quoi
consiste la
ressemblance
de deux fi-
gures.

OR pour peu qu'on y réfléchisse; on reconnoîtra bientôt que deux figures $ABCDE$, $abcde$, pour être semblables, doivent être telles que les angles A, B, C, D, E , de la grande, soient égaux aux angles a, b, c, d, e , de la petite, & que, de plus, les côtés ab, bc, cd , &c. de la petite, contiennent autant de parties p , que les côtés AB, BC, CD , &c. de la grande, contiennent de parties P .

XXXV.

P O U R exprimer cette seconde condition, les Géomètres disent, qu'il faut que les côtés AB , BC , CD , &c. soient proportionnels aux côtés ab , bc , cd , &c.; ou que le côté AB contienne ab , de la même manière que BC contient bc , &c.; ou que le côté AB soit aussi grand, par rapport à ab , que BC l'est par rapport à bc , &c.; ou encore, qu'il y ait même raison, ou même rapport entre AB & ab , qu'entre BC & bc , &c.; ou enfin, que AB soit à ab , comme BC à bc , &c. Toutes façons d'exprimer la même chose, mais qu'il faut se rendre familières, pour entendre le langage des Géomètres.

XXXVI.

A P R E S avoir vû en quoi consiste la ressemblance de deux figures, cherchons quelle voie la Nature nous indique pour tracer une figure semblable à

Manière de faire une figure semblable à une autre.

une autre. Pour cela , représentons-nous un Dessinateur , qui veut copier une figure en la réduisant.

D'abord prenant ab , pour représenter la base AB de la figure à copier $ABCDE$, il incline sur ab les côtés ae & bc , de la même façon que AE & BC sont inclinés sur AB , en observant que les longueurs de ae & de bc , soient à celle de ab , comme les longueurs de AE & de BC sont à celle de AB ; c'est-à-dire , que si AE , par exemple , est la moitié de AB , il fait ae égal à la moitié de ab , & qu'il en use de même pour déterminer la longueur de bc , relativement à BC .

Ayant ainsi déterminé les points e & c , il trace deux lignes ed & cd , qu'il incline sur ea & sur cb , de la même manière que ED & CD sont inclinés sur EA & sur CB , & prolongeant ces lignes jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en d , il acheve sa figure $abcde$.

XXXVII.

QU'ON réfléchisse présentement sur cette construction, on verra qu'elle n'est appuyée que sur l'égalité qui est entre les angles E, A, B, C , & e, a, b, c , & sur la proportionalité des côtés EA, AB, BC , & des côtés ea, ab, bc ; qu'ainsi la figure se trouve finie, sans qu'on ait pris l'angle d , égal à l'angle D , ni les côtés ed, cd , proportionnels aux côtés ED, CD ; réflexion, qui d'abord pourroit faire craindre que l'angle d ne fût effectivement pas égal à l'angle D , ni les côtés ed, cd , proportionnels aux côtés ED, CD , & que, par conséquent, la figure $abcde$ ne se trouvât pas entièrement semblable à la figure $ABCDE$; mais n'eût-on que l'expérience pour se rassurer, ce doute se dissiperoit bientôt; outre que pour peu d'attention qu'on y fasse, on sent que de l'égalité respective des quatre angles E, A, B, C , & e, a, b, c , & de la

proportionalité des trois côtés EA, AB, BC, & ea, ab, bc , résulte nécessairement l'égalité des angles D, d , & la proportionnalité des côtés ED, CD, & ed, cd .

Cependant, pour écarter tout soupçon, faisons voir que toutes les conditions que demande la ressemblance de deux figures, sont nécessairement dépendantes les unes des autres ; ce qui nous fera aisé de faire, en examinant d'abord les triangles, qui sont les figures les plus simples, & qui entrent nécessairement dans la composition de toutes les autres ; examen qui nous conduira à toutes les propriétés & à tous les usages des figures semblables.

X X X V I I I.

FIG. 3. & 4.

Si deux angles d'un triangle sont égaux à deux angles d'un autre triangle, le troi-

S U P P O S O N S que sur la base ab on trace le triangle abc , en ne prenant que les angles cab, cba , égaux aux angles CAB, CBA, du triangle ABC, on s'assurera premièrement que le troisième an-

gle acb égalera le troisième angle ACB . sième angle de l'un égalera le troisième angle de l'autre.

Car soit posé le triangle abc sur le triangle ABC , de manière que le point a se trouve sur le point A , ab sur AB , ac sur AC ; il est clair que cb sera parallèle à CB , & cela parce que le côté cb prolongé, ne pourroit rencontrer le côté CB , que les deux lignes ne penchassent inégalement sur AB , & que, par conséquent, les angles cba & CBA fussent inégaux; ce qui seroit contre la supposition.

Comme, de l'égalité des angles cba & CBA , il suivra que les lignes cb , CB , seront parallèles, du parallelisme de ces lignes, il suivra aussi que les angles Acb , ACB , seront égaux; ce qu'il s'agissoit de prouver.

XXXIX.

MAINTENANT faisons voir que les côtés qui se répondent dans deux triangles acb & ACB , qui ont les mêmes angles, sont proportionnels. Deux triangles, dont les angles sont respectivement égaux, ont leurs côtés proportionnels.

Pour fixer nos idées , supposons d'abord que ab soit la moitié de AB ; il faudra que nous prouvions que ac fera aussi la moitié de AC , & bc la moitié de BC . Que acb , ainsi que dans l'Article précédent , ait encore la position Acb , si on mène cg , parallèle à AB , il est clair que cette ligne égalera bB , ou Ab , & que gB égalera de même cb . Or comme les angles cgC & Ccg , seront manifestement égaux aux angles cbA , & cAb , le triangle Ccg , égalera le triangle cAb , (Article XXX.) Donc on aura Cc égal à Ac , & Cg égal à cb , ou à gB . Donc Ac ou ac fera moitié de AC , & cb moitié de CB .

FIG. 3. & 5.

Si ab étoit contenu trois , quatre , ou tel autre nombre de fois qu'on voudroit , dans AB , il seroit également aisé de démontrer que ac seroit contenu le même nombre de fois dans AC , & cb dans CB . Car des points de division b , f , de la base AB , menant bc , fb , &c. parallèles à BC , on pourroit

placer le long de AC , trois, quatre, &c. triangles Acb , chg , hCi , &c. égaux au triangle acb .

Mais que ab , au lieu d'être contenu FIG. 3. & 6. exactement un certain nombre de fois dans AB , n'y fût contenu qu'avec quelque fraction, deux fois & demie, par exemple, on prouveroit que ac seroit aussi contenu deux fois & demie dans AC , & bc deux fois & demie dans BC .

Car, quand par le moyen des parallèles bc , fb , on auroit placé le long de AC , les deux triangles Acb , chg , égaux à acb , il resteroit entre les deux parallèles hf & CB , de quoi placer un triangle Chi , dont les côtés seroient moitiés des côtés de cAb ; ce qui est évident, puisque par la supposition, fB seroit la moitié de Ab , & que la base hi du triangle Chi égaleroit fB , à cause des parallèles hf , CB . Donc, en général, lorsque deux triangles ABC , abc , ont les mêmes angles, ces triangles, nommés triangles semblables, ont leurs

côtés proportionnels, ou, ce qui revient absolument au même, les côtés AB , BC , AC , de l'un de ces triangles ABC , contiennent le même nombre de parties P , que les côtés ab , bc , ac , de l'autre triangle abc , contiennent de parties p . P étant le pied, la toise, &c. ou, en général, l'échelle avec laquelle ABC , a été construit, & p celle dont on s'est servi en construisant abc .

X L.

DE la proposition que nous venons de démontrer, se tire naturellement la solution d'un problème souvent utile dans la pratique.

Diviser une
ligne en tant
de parties
égales qu'on
voudra.

On demande qu'une ligne soit divisée en un nombre donné de parties égales; ce qui se pourroit faire, à la vérité, en tâtonnant; mais jamais avec cette sûreté que donne l'exactitude géométrique.

FIG. 5. Supposons, par exemple, qu'on ait à diviser AB en trois parties égales, on

commence par tirer une ligne indéfinie AC, qui fasse un angle quelconque avec AB, ensuite on porte sur cette ligne trois parties égales Ac , cb , bC , d'une ouverture de compas prise à volonté, puis on tire CB, & l'on mène à cette droite les parallèles cb , bf ; par-là, AB, coupée aux points b & f , se trouve partagée en trois parties égales; ce qui est clair par l'Article précédent.

XLI.

Si on vouloit diviser une ligne en un nombre fractionnaire de parties, comme deux & demie, trois & un quart, &c. ou bien, qu'on se proposât en général, de diviser la ligne AB au point b , en sorte que AB fût à Ab , comme la ligne NO à la ligne MQ; on voit encore, que la solution du problème dépendroit de l'Art. XXXIX; c'est-à-dire, qu'il faudroit tirer par A une droite quelconque, prendre sur cette droite Ac & AC, égales à MQ,

Ce que c'est qu'une ligne quatrième proportionnelle à trois autres, & comment on la trouve.

FIG. 6.

& à NO, & ensuite mener cb , parallèle à CB ; alors le point b seroit le point cherché.

Les Géomètres énoncent de cette autre maniere le problème que nous venons de résoudre. Trouver à trois lignes NO, MQ, AB, une quatrième proportionnelle.

XLII.

FIG. 7. & 8. IL est évident que deux triangles semblables ABC, abc , auront, non-seulement leurs côtés proportionnels, mais que les perpendiculaires CF, cf , qu'on abaissera des sommets C, c , sur les bases AB, ab , suivront encore la proportion des côtés : ce qui est si aisé à démontrer par ce qui précède, que nous négligerons de nous y arrêter.

Les hauteurs des triangles semblables, sont proportionnelles à leurs côtés.

XLIII.

QUANT à l'aire des triangles semblables ABC, abc , on voit que celle du premier contiendra autant

de quarrés X faits sur la mesure P, que l'aire du second, contiendra de quarrés x , faits sur la mesure p . Car comme CF & AB, auront, par l'Article précédent, autant de parties P, que cf & ab , auront de parties p ; la moitié du produit de CF par AB, mesure de ABC; (Article XIV.) donnera le même nombre que celui qui résultera de la moitié du produit de cf par ab , mesure de abc ; mais avec cette différence, que CF & AB, se comptant en parties P, leur produit se comptera en quarrés X, & que cf & ab , qui se compteront en parties p , donneront un produit qui se comptera en quarrés x .

XLIV.

CE que nous venons de dire sur la mesure des triangles semblables, sert de preuve à une proposition, qui, dans les Elemens de Géométrie, s'énonce ordinairement ainsi. Les triangles semblables ABC, abc , sont entr'eux

Les aires
des triangles
semblables,

les comme
les quarrés
des côtés ho-
mologues.

comme les quarrés $ABDE$, $abde$, de leurs côtés homologues ou correspondans AB , ab .

La démonstration que renferme l'Article précédent, mène absolument à cette conséquence ; car le quarré $ABDE$, contenant autant de X que $abde$ contient de x , il est évident que les deux nombres de quarrés X , qui expriment le rapport du triangle ABC au quarré $ABDE$, sont les mêmes que les nombres de quarrés x , qui donnent le rapport du triangle abc , au quarré $abde$; ou, ce qui revient au même, que le triangle ABC est au quarré $ABDE$, comme le triangle abc au quarré $abde$.

De-là il suit que si, par exemple, le côté AB étoit double du côté ab , le triangle ACB seroit quadruple du triangle acb ; que si AB étoit triple de ab , le triangle ACB seroit neuf fois plus grand que le triangle acb , &c ; car AB ne peut être double de ab , que le quarré

$ABDE$

ABDE ne soit que quadruple du carré *abde*, &c.

X L V.

POUR passer présentement des triangles aux autres figures, supposons qu'à chacun des triangles semblables ABD, *abd*, on joigne deux autres triangles ADE & BDC, *ade* & *bdc*, les deux premiers semblables aux deux autres; on verra que dans les figures totales ABCDE, *abcde*,

FIG. 1. & 2.
même Planche.

Propriétés
des figures
semblables,
tirées de celles
des triangles.

1°. Les angles A, B, C, D, E, seront les mêmes que les angles *a, b, c, d, e*; ce qui est clair, puisque les uns & les autres seront, ou des angles correspondans de triangles semblables, ou des angles composés de ces angles correspondans.

2°. On verra que le rapport des côtés homologues ou correspondans DE, *de*, BC, *bc*, &c. des figures ABCDE, *abcde*, sera nécessairement le même, c'est-à-dire, que si P, par exemple, se trouve un certain nombre de fois dans

la base AB , & que p se trouve le même nombre de fois dans ab , P & p feront aussi contenus un même nombre de fois dans deux côtés homologues quelconques DE & de ; car à cause de la ressemblance des triangles ABD , abd , la quantité de P que renfermera AD , égalera la quantité de p renfermée dans ad ; alors regardant ces côtés comme les bases des triangles semblables ADE , ade , le nombre de parties P contenues dans DE , fera le même que le nombre de parties p que contiendra le côté de .

3°. On verra encore que si dans les deux figures on tiroit des lignes qui se répondissent, telles que CE , ce , ou les perpendiculaires DF , df , &c; ces lignes seroient toujours entr'elles dans la même raison que les côtés homologues des deux figures.

Donc les figures $ABCDE$, $abcde$, feront entièrement semblables dans toutes leurs parties.

XLVI.

LA figure *abcde* ainsi décrite , parfaitement semblable à la figure ABCDE , il est évident que si on vouloit tracer de nouveau une figure entièrement égale à *abcde* , & par conséquent , encore semblable à ABCDE , il seroit inutile de mesurer tous les côtés & tous les angles de *abcde* ; qu'il suffiroit , par exemple , de prendre les trois côtés *ab* , *ea* , *bc* , & les quatre angles , *e* , *a* , *b* , *c* , & qu'avec cela seul on seroit sûr de retracer la même figure *abcde* , semblable à ABCDE ; ce qui forme une démonstration complète de ce qu'on n'avoit fait que présumer (Article XXXVII.). Mais on peut aller plus loin ; car il est clair qu'on aura toujours différentes façons de combiner la quantité d'angles & de lignes qu'on doit nécessairement mesurer dans une figure quelconque , pour en faire une autre qui lui soit propor-

tionnelle ; ce seroit fatiguer le Lecteur que d'entrer dans un plus grand détail.

XLVII.

Les aires des figures semblables, sont entr'elles comme les quarrés des côtés homologues.

ON démontreroit, par des raisonnemens semblables à ceux de l'Article XLIII. que le nombre de quarrés X , que contient la figure $ABCDE$, est le même que celui des quarrés x renfermés dans la figure $abcde$; & qu'ainsi, les aires des figures semblables sont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues.

XLVIII.

Les figures semblables ne sont différenciées que par les échelles sur lesquelles elles sont construites.

TOUT ce qui vient d'être dit sur les figures semblables, peut se réduire à ce seul & unique principe, que les figures semblables ne sont différenciées que par les échelles sur lesquelles elles sont construites.

XLIX.

MAINTENANT, pour mieux fen-

tir l'usage qu'on doit faire des triangles semblables & des réductions , pour avoir la mesure des terrains sur lesquels on ne pourroit pas commodément opérer , figurons-nous que ABCDEF représente le contour d'un Parc , d'un Etang , &c. dont on voudra déterminer l'étendue. D'abord on mesurera un des côtés de la figure, FE par exemple, & l'on verra combien ce côté aura de toises, de perches, &c. ensuite prenant telle échelle qu'on voudra , on tracera sur un carton, ou sur du papier, une ligne *fe*, égale à autant de parties de l'échelle, que FE contiendra de toises, de perches, &c. puis faisant les angles *def*, *dfe*, égaux aux angles DEF, DFE, on aura le triangle *edf*, dans lequel on abaissera *eg*, perpendiculaire sur *df*: cela fait, & les lignes *df* & *eg*, mesurées par le moyen de l'échelle, on conclura qu'autant que ces lignes contiendront de parties réduites, autant DF & EG contiendront de toises, de

PL. V.

FIG. I. & 2.

perches, &c. Ainsi, en multipliant DF par la moitié de EG , on aura la valeur du triangle EDF , & mesurant de la même manière chacun des autres triangles DCF , BCF , ABF , l'aire de la figure entière se trouvera déterminée.

L.

Manière de mesurer la distance d'un lieu inaccessible.

IL arrive souvent que dans la pratique, il faut mesurer la distance du lieu F , où l'on est placé à un autre lieu, où quelque obstacle empêche qu'on ne se transporte; nouveau problème, mais dont la solution est déjà donnée d'avance dans l'Article qui précède celui-ci; car puisque pour mesurer DF , on n'a eu besoin que de la similitude des triangles def & DEF , il est clair que si on mesure une base quelconque EF , & que des points F & E , on puisse appercevoir le point D , le problème sera résolu; c'est-à-dire, qu'on aura la distance FD .

LI.

L'USAGE qu'on peut faire des instrumens particuliers , tels que BAC , que j'ai dit (Article XXVIII.) composé de deux branches unies au point A , autour duquel elles ont la liberté de tourner , expose souvent à bien des mécomptes. Tantôt l'ouverture de l'angle s'altérera dans le transport ; tantôt la forme qu'on est obligé de donner à l'instrument pour en faciliter l'usage , empêchera qu'on ne puisse l'appliquer sur le plan où devra se faire la réduction.

FIG. 3.

Ajoutons à cela , que chaque nouvel angle BAC , qu'on prend de cette façon , demande qu'on transporte de nouveau , l'instrument sur le papier , & que la seule ressource qu'on ait pour comparer deux angles , c'est de les poser l'un sur l'autre , sans que , par ce moyen , on puisse avoir au juste ni leur rapport , ni leur grandeur absolue.

LII.

IL étoit donc nécessaire de chercher une mesure fixe pour les angles, comme on en avoit déjà pour les longueurs. Or cette mesure qu'il falloit avoir, il a été facile de la trouver. Car que Ab restant fixe, on lui applique d'abord le côté Ac , qu'ensuite on fasse tourner ce côté autour de A , il est clair que si ayant adapté à l'extrémité c de la branche mobile Ac , ou une plume, ou un crayon, qui donne moyen de rendre sensible la trace du point c , cette trace, qui formera un arc de cercle, donnera exactement la mesure de l'angle, pour chaque ouverture particulière des côtés Ab , Ac , c'est-à-dire, qu'à cause de l'uniformité de la courbure du cercle, il arrivera nécessairement qu'à une ouverture double, triple, quadruple de cAb , répondra un arc double, triple, quadruple de cb .

FIG. 4.

Un angle a pour mesure l'arc de cercle qu'interceptent ses côtés.

LIII.

SUPPOSANT donc que la circonférence $bcdfg$, décrite par la révolution entière du point c , soit divisée en un nombre quelconque de parties égales, le nombre des parties contenues dans l'arc qu'intercepteront les lignes Ac & Ab , mesurera exactement l'ouverture de ces lignes, ou l'angle cAb qu'elles formeront.

Les Géomètres sont convenus de diviser le cercle en 360 parties, qu'on appelle degrés, chaque degré en 60 minutes, chaque minute en 60 secondes, &c. Ainsi, un angle bAc , par exemple, aura 70 degrés 20 minutes, si l'arc bc , qui lui servira de mesure, a 70 des 360 parties du cercle, & de plus 20 soixantièmes parties d'un degré.

Le cercle est partagé en 360 degrés; chaque degré en 60 minutes, &c.

LIV.

DE-là il suit qu'un angle CAB de FIG. 5.

L'angle droit a 90 degrés, & ses côtés sont perpendiculaires l'un à l'autre.

90 degrés, nommé communément angle droit, est celui dont les côtés AC & AB interceptent le quart BC de la circonférence, & sont perpendiculaires l'un à l'autre.

L V.

Un angle aigu est plus petit qu'un angle droit.

ON appelle angle aigu tout angle plus petit qu'un angle droit, ou qui a moins de 90 degrés. Tels sont les angles CAB, FAG, EAG.

FIG. 6.

L V I.

Un angle obtus est plus grand qu'un angle droit.

AU contraire, on appelle angle obtus, celui qui a plus de 90 degrés, comme FAB.

L V I I.

La somme des angles, faits du même côté sur une ligne droite, & qui ont le même sommet, vaut 180 degrés.

IL est évident que tous les angles, comme GAF, FAE, EAC, CAB, qu'on peut faire du même côté sur une ligne droite GB, & qui ont le même sommet A, sont égaux, pris ensemble à 180 degrés, ou à deux angles droits, mesurés par la demi-circonférence.

LVIII.

DE même la somme de tous les angles EAF, FAB, BAC, CAD, DAE, qu'on peut faire autour du point A, qui leur sert de sommet commun, est égale à 360 degrés, ou à quatre angles droits mesurés par la circonférence entière BCDEF.

FIG. 7.

Tous les angles qu'on peut faire autour d'un même point, sont égaux, pris ensemble, à quatre droits.

LIX.

APRÈS avoir trouvé que les angles ont les parties du cercle pour mesure, voyons comment on s'y prend pour déterminer ce qu'un angle qu'on veut mesurer contient de degrés.

On se sert d'un instrument I, qu'on appelle demi-cercle: cet instrument est composé de deux règles EAC, DAB, d'égale longueur qui se croisent en A, & qui sont chargées de pinnules à leurs extrémités; l'une de ces règles EC, qu'on nomme alidade, est mobile autour de A, & l'autre DB est fixe, &

FIG. 8.

Usage de l'instrument appelé demi-cercle, pour prendre la grandeur d'un angle.

sert de diamètre à un demi cercle DCB divisé en 180 degrés, &c.

Or veut-on connoître l'angle que forment deux lignes droites, tirées du lieu où l'on est, à deux objets quelconques F, G; on place d'abord la règle fixe DAB, de maniere que l'œil placé en D, apperçoive un des deux objets F, par les deux pinnules D & B: ensuite, sans remuer l'instrument, on tourne l'alidade, jusqu'à ce que l'œil placé en E, apperçoive l'autre objet G, par les pinnules E & C; & alors l'alidade marque sur le demi-cercle gradué, le nombre de degrés, minutes, &c. que contient l'angle proposé GAF.

L X.

Usage du rapporteur, pour faire un angle d'un nombre déterminé de degrés.

SI on veut faire sur le papier un angle d'un nombre déterminé de degrés, on se sert d'un instrument K *, divisé en 180 degrés, qu'on appelle rapporteur, ou transporteur, & posant le centre A sur la pointe de l'angle qu'on

* FIG. 9.

veut tracer , & la ligne AB sur la ligne AG , qu'on prend pour un des côtés de l'angle , on marque le point C , qui répond au nombre de degrés qu'on veut donner à l'angle proposé , puis par ce point , & par le centre A , tirant la ligne ACO , on a l'angle OAG , qui contient le nombre de degrés demandé.

LXI.

SUPPOSONS maintenant qu'ayant pris une base FG sur le papier , on veuille faire sur cette base , un triangle FGH , semblable au triangle ABC , pris sur un terrain. On se servira du demi cercle pour sçavoir ce que chacun des angles CAB , CBA , contiendra de degrés ; ensuite , par le moyen du rapporteur , on fera les angles HFG & HGF , respectivement égaux aux angles CAB & CBA , & alors parce que le point H , auquel les côtés FH & GH se réuniront , fera nécessaire-

PL. VI.

FIG. 1.
& 2.

ment déterminé par l'opération, aussi bien que l'angle FHG, on aura le triangle FGH, entièrement semblable au triangle ABC.

L X I I.

COMME il importe dans la pratique, ainsi que nous l'avons déjà dit, que les angles soient exactement mesurés, il ne faut pas se contenter de les prendre, même avec les instrumens les plus parfaits, il faut encore trouver le moyen de vérifier leurs mesures, pour en faire la correction, s'il étoit nécessaire. Or ce moyen est simple & facile. Reprenons le triangle ABC. On sent que la grandeur de l'angle C doit résulter de celle des angles A & B; car qu'on augmentât, ou qu'on diminuât ces angles, la position des lignes AC, BC, changeroit, & par conséquent, l'angle C, que ces lignes font entr'elles. Or si cet angle dépend de la grandeur des angles A & B, on doit pré-

sumer que ce que les angles A & B renferment de degrés doit déterminer le nombre de degrés que doit renfermer l'angle C, & qu'ainsi il pourra servir de vérification aux opérations qu'on aura faites pour déterminer les angles A & B, puisqu'on sera sûr qu'on aura bien mesuré les angles A & B, si, en mesurant ensuite l'angle C, on lui trouve le nombre de degrés qui lui conviendra relativement à la grandeur des angles A & B.

Pour trouver comment de la grandeur des angles A & B, on peut conclure celle de l'angle C, examinons ce qui arriveroit à cet angle, si les lignes AC, BC, venoient ou à s'approcher, ou à s'écarter l'une de l'autre. Supposons, par exemple, que BC tournant autour du point B, s'écarte de AB, pour s'approcher de BE, il est clair que pendant que BC tourneroit, l'angle B s'ouvriroit continuellement; & qu'au contraire, l'angle C se resserreroit

FIG. 3.

de plus en plus ; ce qui d'abord pourroit faire présumer que , dans ce cas , la diminution de l'angle C égaleroit l'augmentation de l'angle B, & qu'ainsi la somme des trois angles A, B, C, seroit toujours la même , quelle que fût l'inclinaison des lignes AC , BC, sur la ligne AE.

L X I I I.

O R cette induction présumée porte avec elle sa démonstration ; car qu'on

FIG. 4. mène ID , parallele à AC , on verra

Les angles alternes sont les angles renversés que forme , de part & d'autre , une ligne droite qui tombe sur deux paralleles.

premièrement que les angles ACB & CBD , appellés angles alternes , seront égaux , ce qui est évident , puisque les lignes AC & IB étant paralleles , elles seront également inclinées sur CBO , & qu'ainsi l'angle IBO égalera l'angle ACB. Mais l'angle IBO égalera aussi l'angle CBD , parce que la ligne ID ne fera pas plus inclinée sur CO d'un côté que de l'autre. Donc l'angle DBC égal à l'angle IBO , égalera l'angle ACB , son alterne.

Ces angles sont égaux.

L X I V.

LXIV.

ON verra, en second lieu, que l'angle CAE sera égal à l'angle DBE, à cause des parallèles CA & DB. Donc les trois angles du triangle pourroient être mis à côté les uns des autres, & unis par leurs sommets aux points B, & alors on verroit que les trois angles DBE, CBD & CBA, qui égaleroient les trois angles CAB, ACB, CBA, seroient égaux à deux angles droits (Article LVII.) & comme tout ce que nous venons de dire pourra également s'appliquer à quelque triangle que ce soit, on fera assuré de cette propriété générale que la somme des trois angles d'un triangle est constamment la même, & qu'elle est égale à deux droits, ou, ce qui revient au même, à 180 degrés.

La somme des trois angles d'un triangle est égale à deux angles droits.

LXV.

DONC, pour conclure la valeur du
E

troisième angle d'un triangle , lorsqu'on en aura mesuré deux , il faudra retrancher de 180 degrés le nombre de degrés que les deux angles feront ensemble. Propriété qui donne une manière bien commode de vérifier la mesure des angles d'un triangle , & dont on verra une infinité d'autres utilités , à mesure qu'on avancera. Nous nous contenterons ici d'en tirer les conséquences les plus immédiates.

L X V I.

UN triangle ne peut avoir plus d'un angle droit ; à plus forte raison ne peut-il avoir plus d'un angle obtus.

L X V I I.

SI l'un des trois angles d'un triangle est droit , la somme des deux autres angles est toujours égale à un droit.

Ces deux propositions sont si claires , qu'elles n'ont pas besoin d'être démontrées.

LXVIII.

Si on prolonge un des côtés du triangle ABC, le côté AB, par exemple, l'angle extérieur CBE vaudra seul les deux angles intérieurs opposés BCA, CAB; car qu'à l'angle CBA, on ajoute, ou les deux angles BCA & CAB, ou l'angle CBE, la somme sera toujours égale à 180 degrés, ou à deux angles droits (Article LXIV.).

L'angle extérieur d'un triangle, vaut les deux angles intérieurs opposés.

LXIX.

CONNOISSANT un des angles d'un triangle isocèle ABC, on connoît les deux autres.

FIG. 5.

Qu'on ait l'angle au sommet A; il est clair que si on retranche le nombre de degrés que contiendra cet angle des 180 degrés, mesure des trois angles du triangle, la moitié de la somme qui restera sera la mesure de chacun des angles B, C, pris sur la base.

Un angle d'un triangle isocèle donne les deux autres.

Que ce fût un de ces angles B, C,

qu'on connût, le double de sa valeur retranché de 180 degrés, donneroit l'angle au sommet A.

L X X.

Les angles
d'un triangle
équilatéral,
font chacun
de 60 dé-
grés.

C O M M E un triangle équilatéral n'est autre chose qu'un triangle isocèle auquel chacun de ses côtés peut également servir de base, il est clair que ses trois angles sont nécessairement égaux, & qu'ils valent chacun 60 degrés, tiers de 180 degrés.

L X X I.

DE-là se tire aisément la description de l'exagone ou poligone de six côtés, que nous avons promise (Article XXIV.)

Description
de l'exagone.

Car pour trouver une ligne qui partage la circonférence en six parties égales, il faudra que cette ligne soit la corde d'un arc de 60 degrés, sixième partie de 360 degrés, valeur de la circonférence entière. Supposant donc

que AB soit cette corde, & du centre I menant aux extrémités A & B les rayons AI & IB, l'angle AIB vaudra 60 degrés, & parce que les deux côtés AI & IB seront égaux, le triangle AIB sera isocèle. Donc l'angle au sommet étant de 60 degrés, chacun des deux autres angles vaudra aussi 60 degrés, moitié de 120. Donc (Article LXX.) le triangle AIB sera équilatéral. Donc AB égalera le rayon du cercle. D'où il suit, que pour décrire un exagone, il faudra ouvrir le compas d'un intervalle égal au rayon, & le porter six fois de suite sur la circonférence, & l'on aura les six côtés de l'exagone.

FIG. 6.

LXXII.

L'EXAGONE ABCDEF décrit, on décrira facilement le dodécagone, ou poligone de douze côtés.

Pour cela, on divisera l'arc AKB, ou l'angle AIB, en deux parties égales,

La moitié de l'angle au centre de l'exagone

donne l'angle au centre du dodéca-gone.

& AK , corde de la moitié de l'arc AKB , fera un des côtés du dodéca-gone.

L X X I I I .

Partager un angle en deux également.

O R pour partager l'arc AKB , en deux arcs égaux AK & KB , on fera la même opération que s'il s'agissoit de couper la corde AB en deux parties égales ; c'est-à dire , que des points A & B , comme centres , & d'un intervalle quelconque , on décrira les arcs MLN , OLP , & par le point L , section des deux arcs , & par le centre I on mènera la ligne LI , qui divisera en deux & l'arc AKB , & la corde AB.

L X X I V .

Description des Polygones de 24 , 48 , &c. côtés.

Q U' O N suive la méthode précédente , & qu'on partage l'arc AK en deux arcs égaux , la corde de l'un ou de l'autre de ces arcs , fera le côté du polygone de 24 côtés. On aura de même les polygones de 48 , 96 , 192 , &c. côtés.

LXXV.

M A I N T E N A N T pour décrire un octogone; c'est-à-dire, un poligone de 8 côtés, on commencera par tracer un quarré dans le cercle; ce qu'on fera, si, après avoir mené deux diamètres AIB & CIE, qui se coupent à angles droits: on joint leurs extrémités par les lignes AC, CB, BE, AE.

Description
de l'octogone.

FIG. 7.

Car à cause de la régularité du cercle, & de l'égalité des quatre angles que forment les perpendiculaires AIB, CIE, les quatre côtés AC, CB, BE, EA, seront nécessairement égaux, & se trouveront également panchés les uns sur les autres; ce qui ne pourra convenir qu'au quarré.

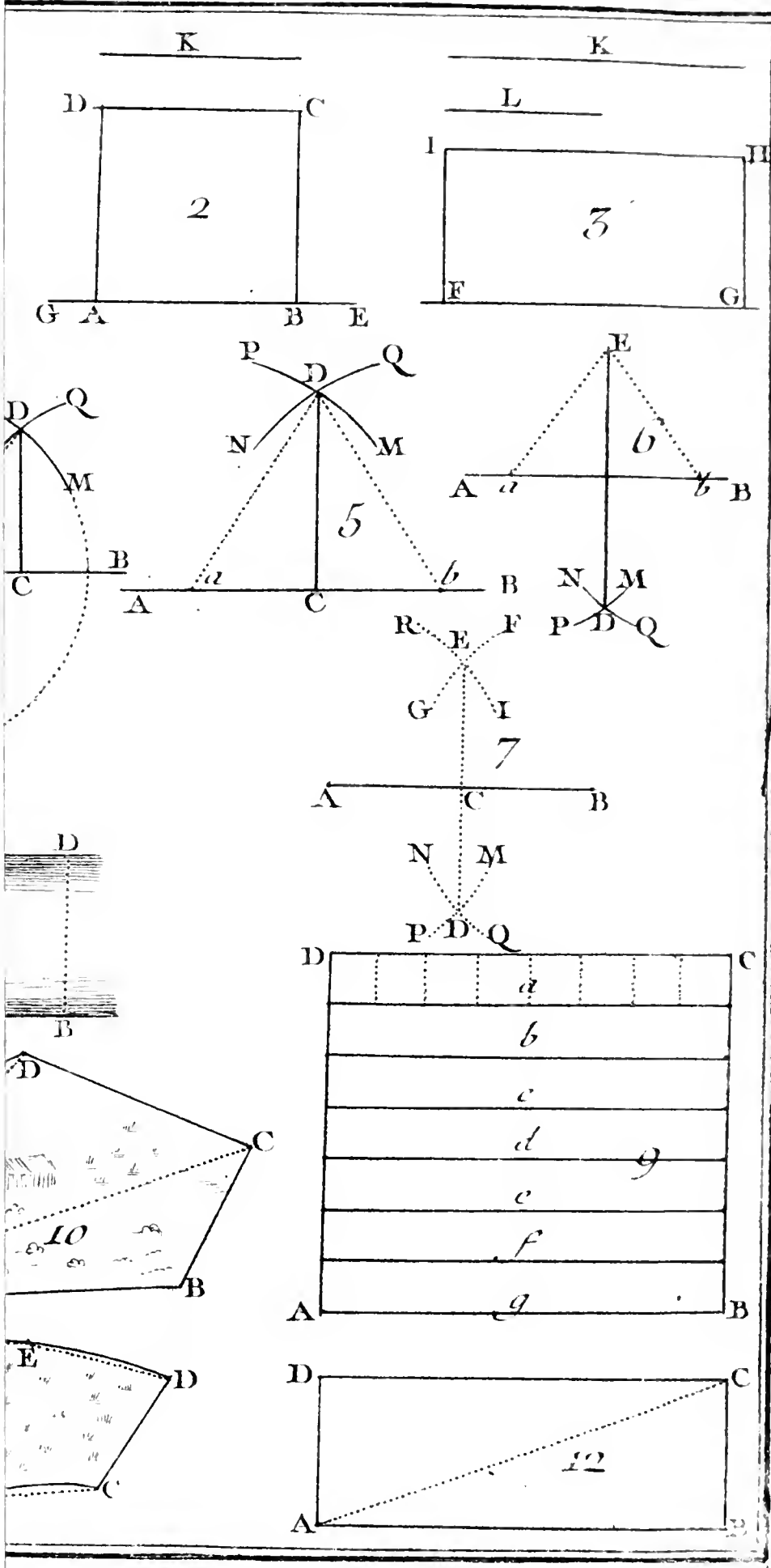
Le quarré ainsi décrit, on divisera, par la méthode précédente, chacun des arcs CKB, BLE, &c. en deux parties égales; ce qui donnera l'octogone CKBLEMAN.

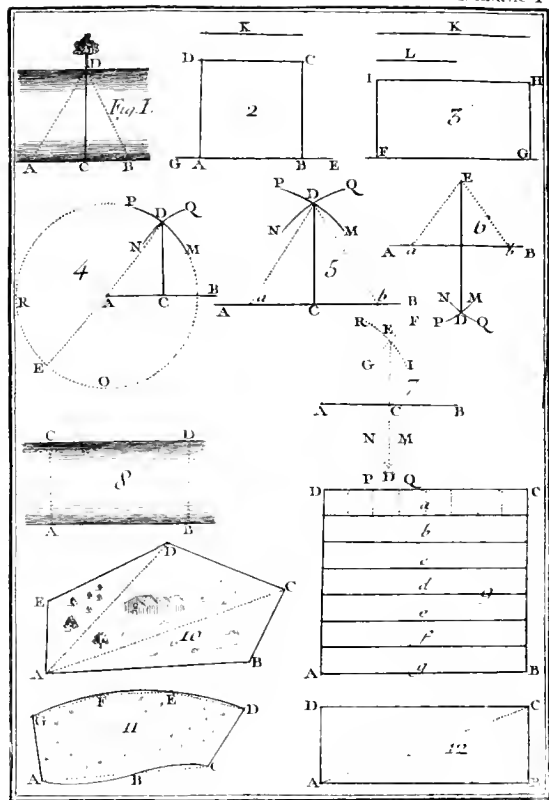
Qu'on partageât de même chacun

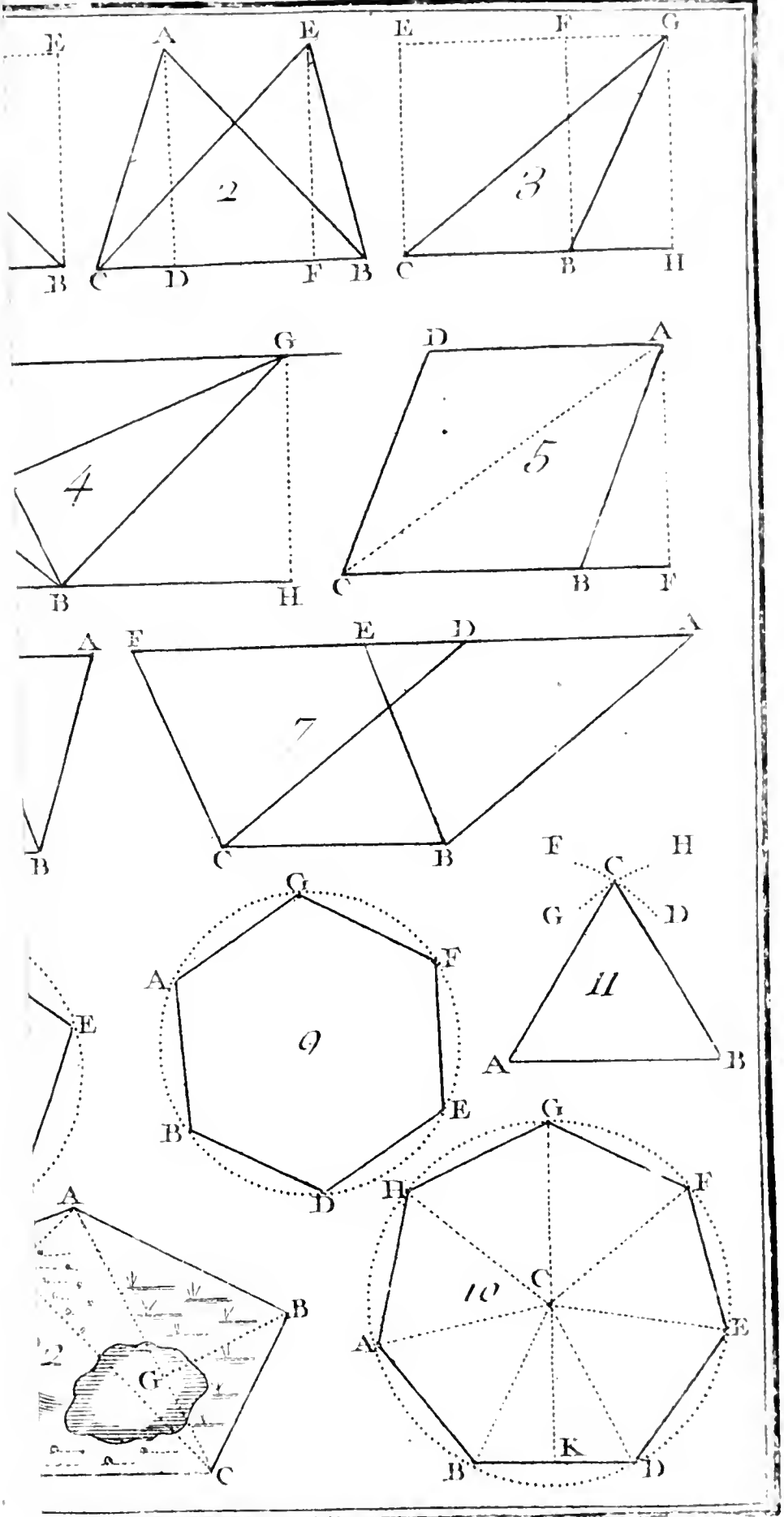
Et des poli-
gones de 16,
32, &c.
côtés.

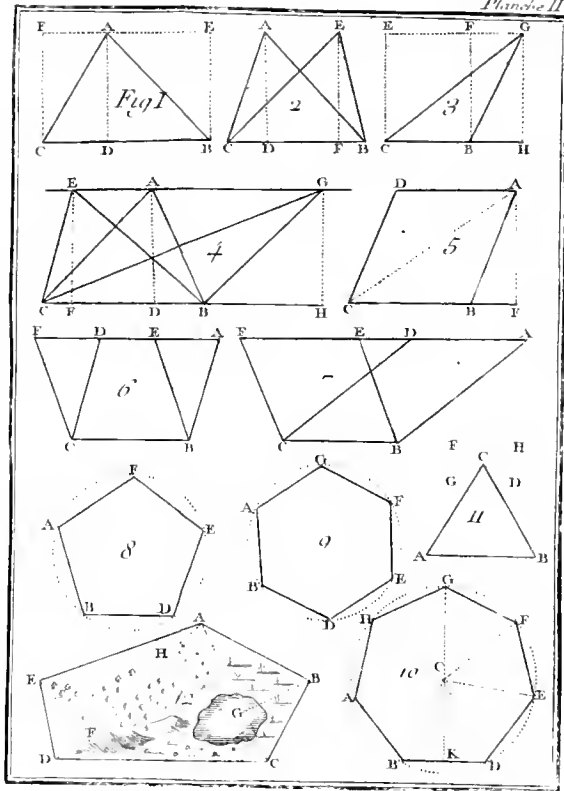
des arcs CK, KB, &c. en 2, en 4,
en 8, &c. parties égales, on auroit
les poligones de 16, 32, 64, &c.
côtés.











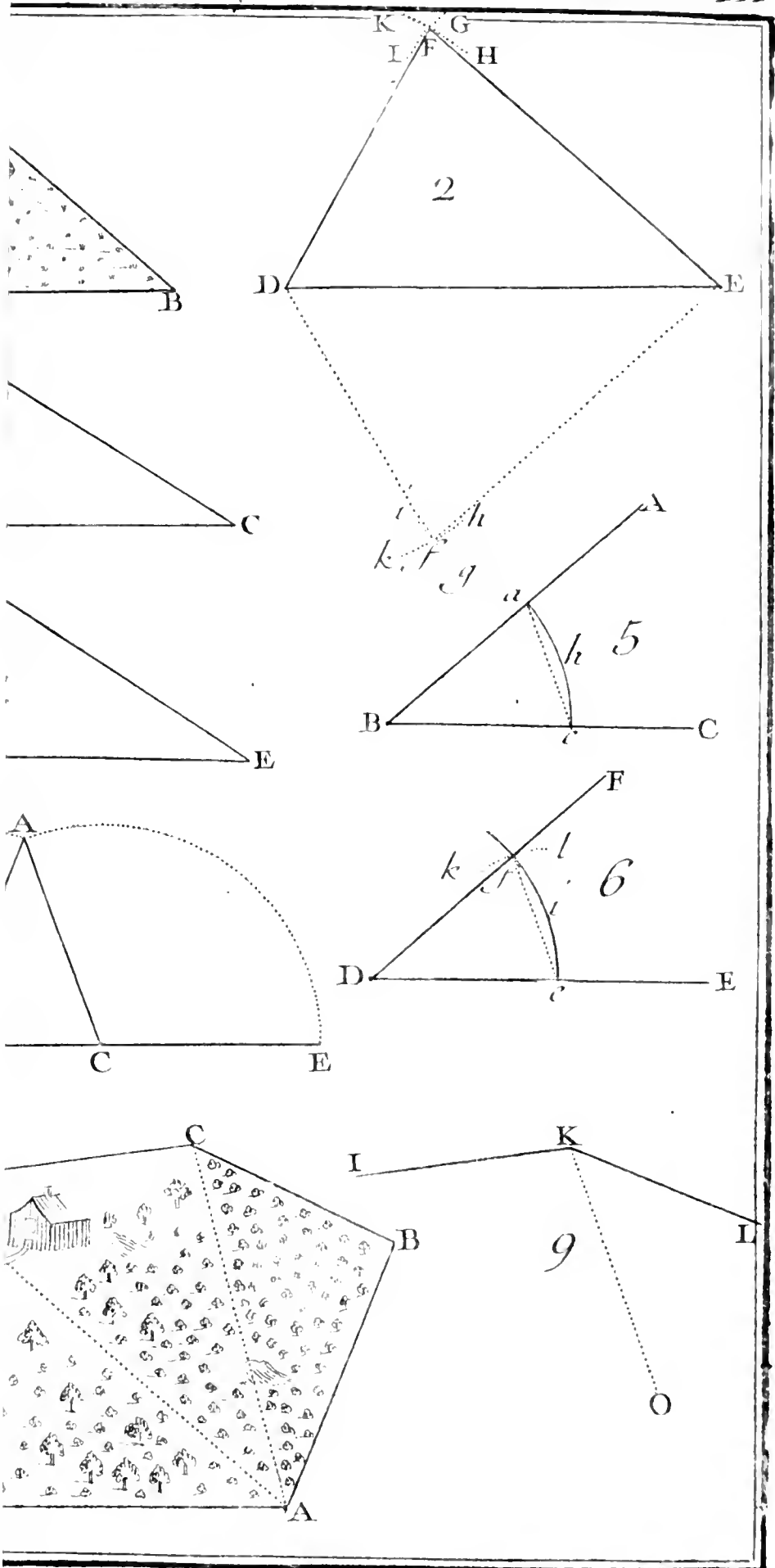
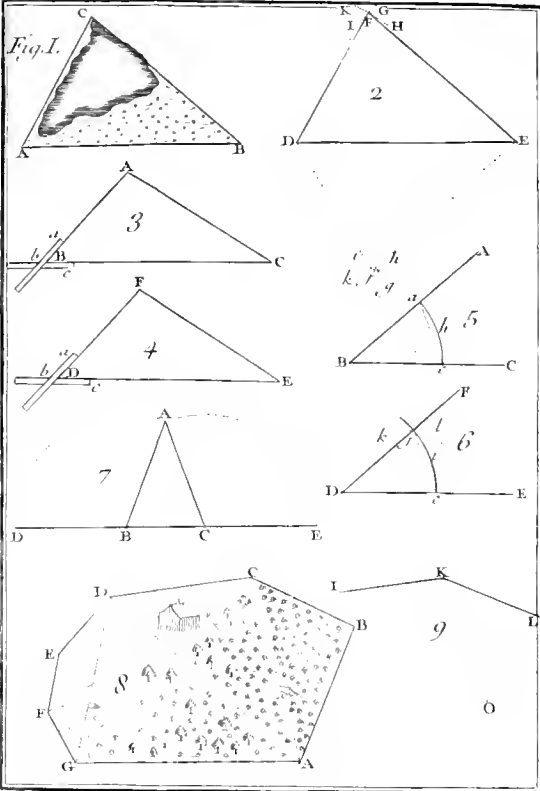
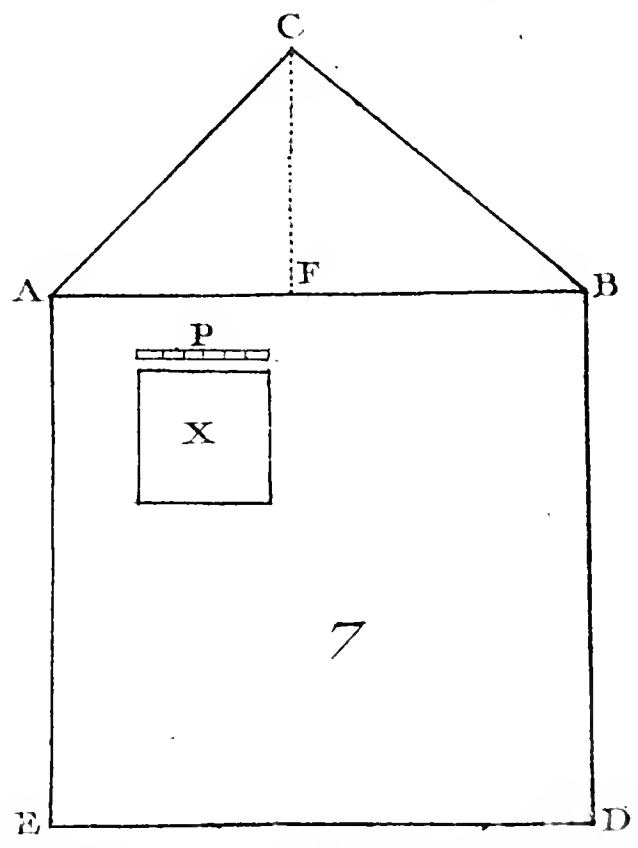
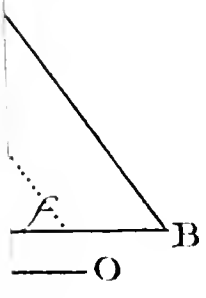
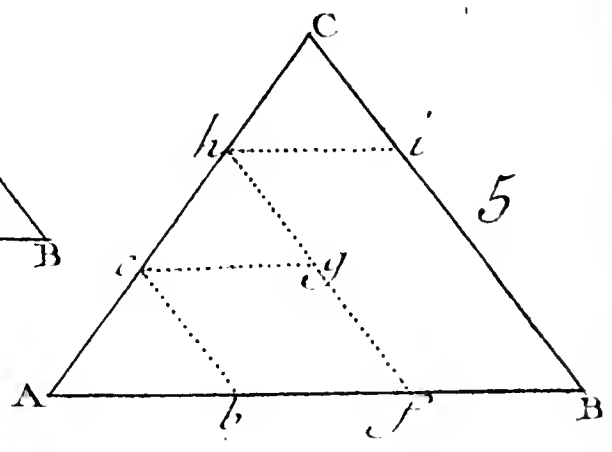
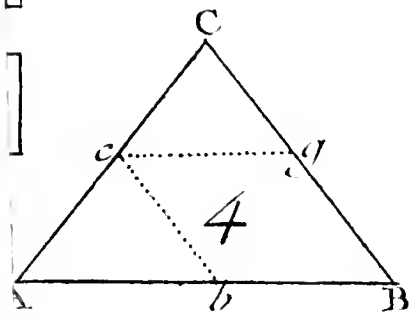
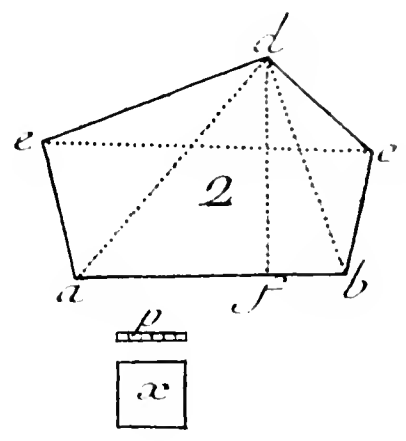
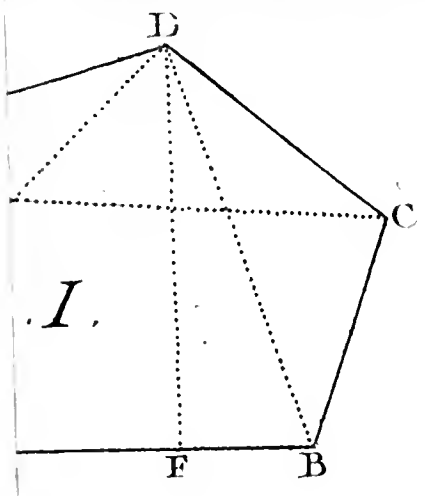
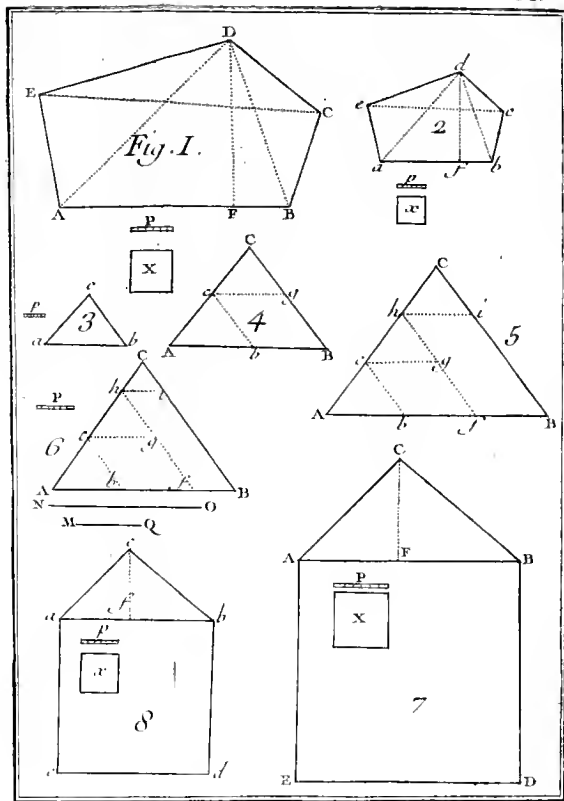


Fig. I.







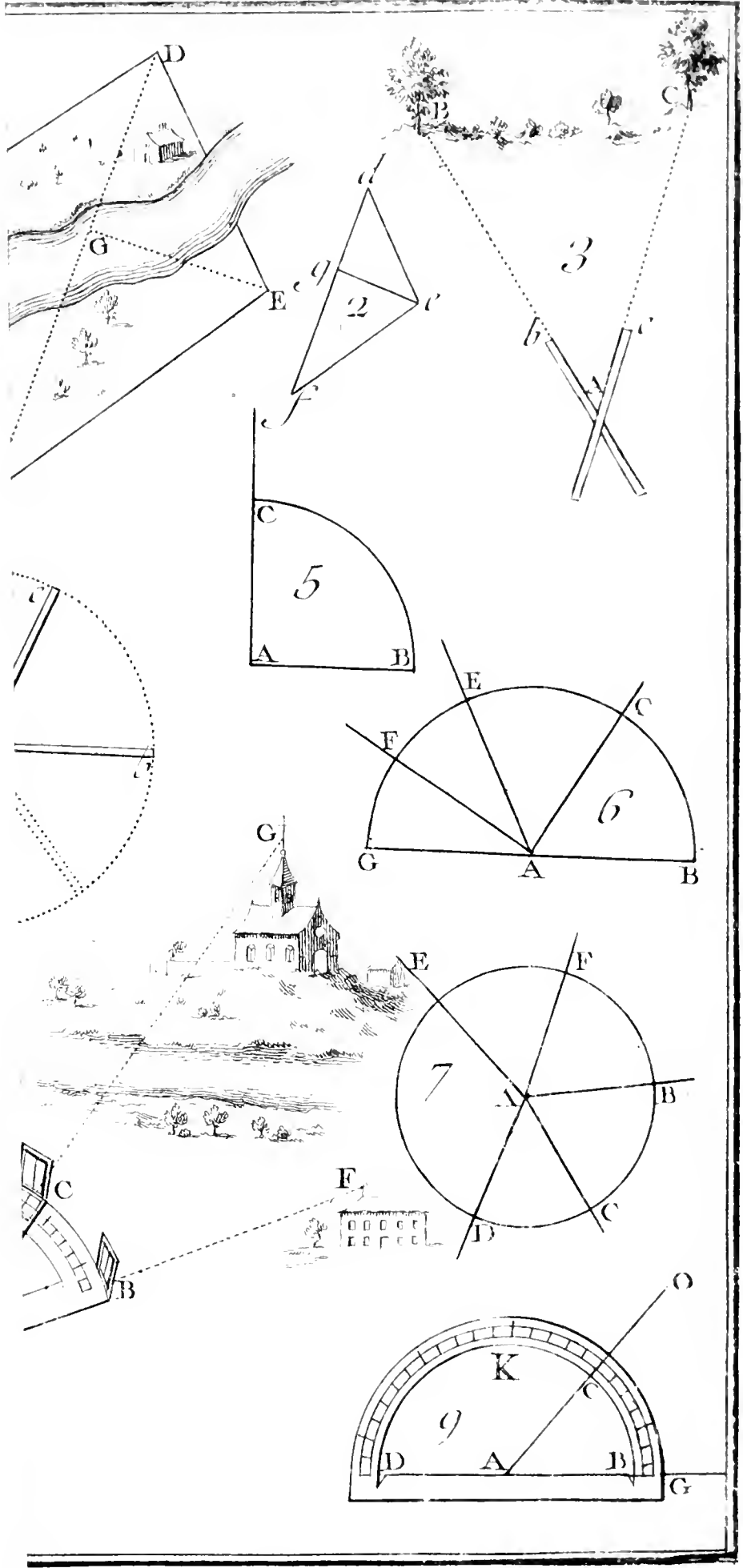
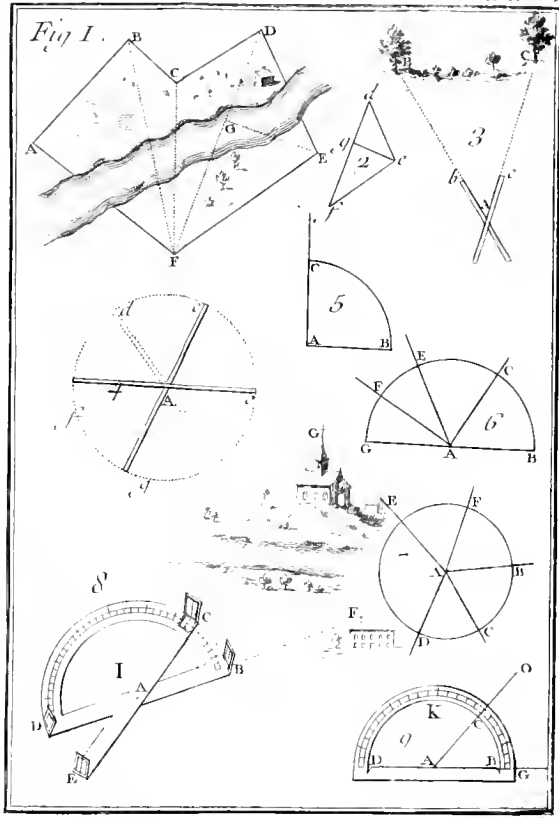


Fig 1.



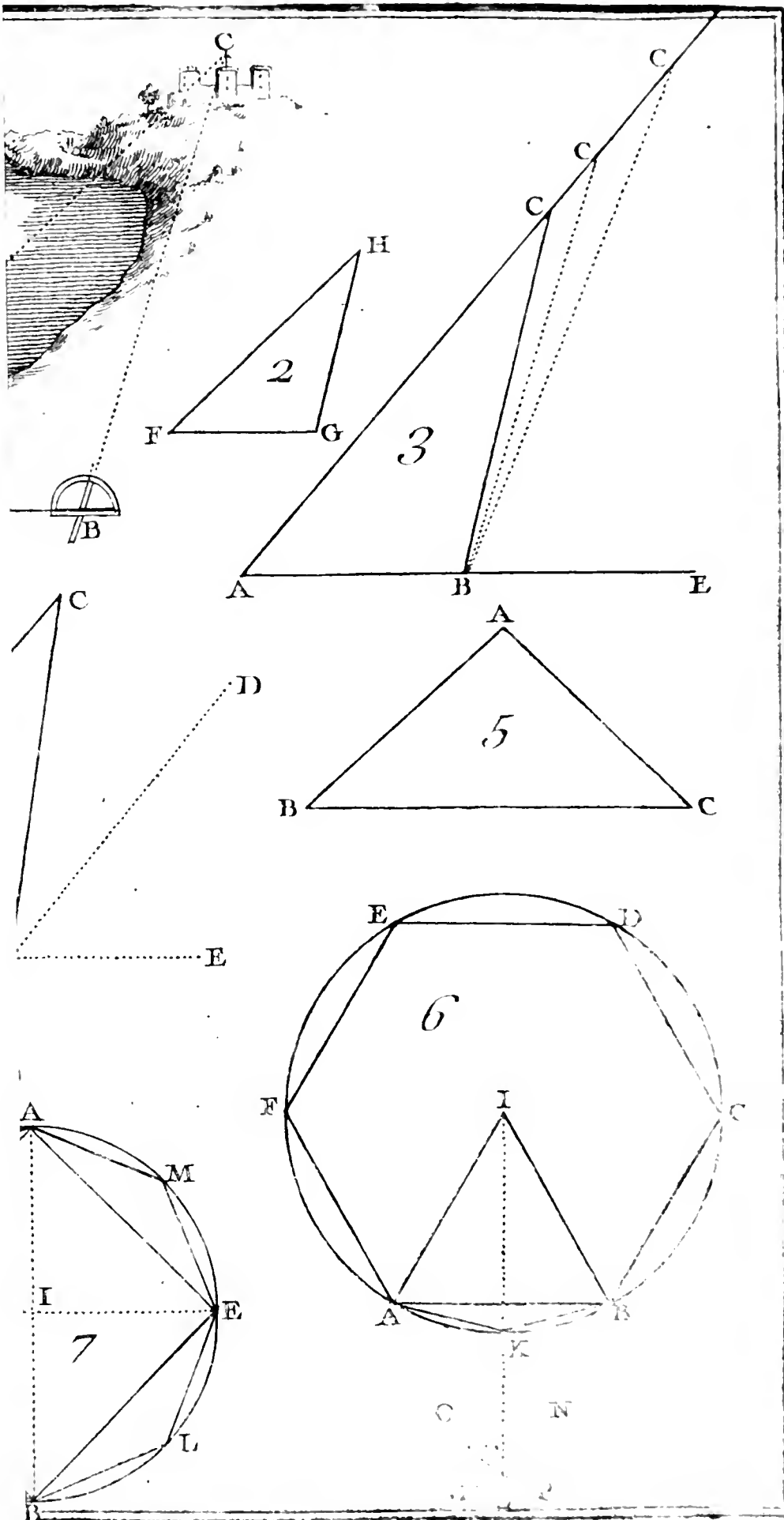
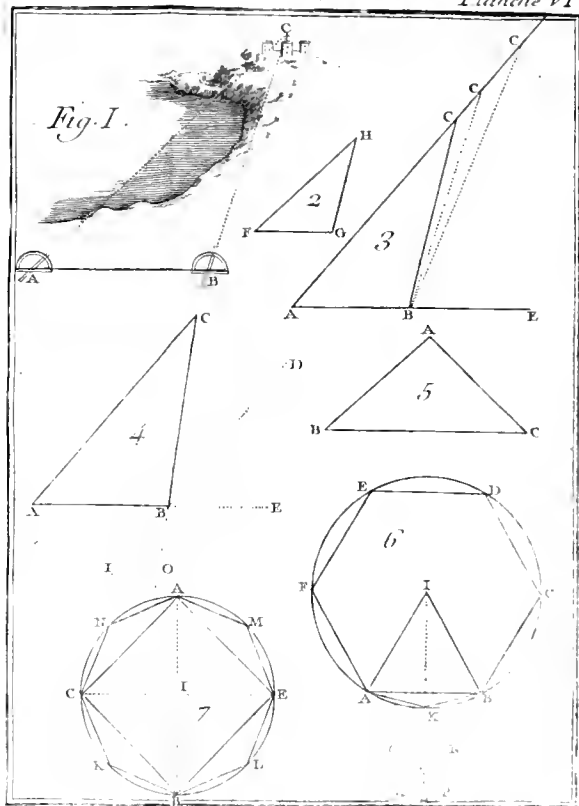


Fig. I.





E L E M E N S

D E

G E O M E T R I E .

S E C O N D E P A R T I E .

*De la méthode géométrique de comparer
les figures rectilignes.*



Si on a fait attention à ce que nous avons dit, pour montrer comment on est parvenu à mesurer les Terrains, on a dû reconnoître que les positions des lignes les unes à l'égard des autres, fournissent des remarques

dignes d'attention par elles-mêmes, indépendamment de l'utilité dont elles pouvoient être dans la pratique; & il est à préfumer que ces remarques ont engagé les premiers Géomètres à pousser plus loin leurs découvertes, car ce ne sont pas seulement les besoins qui déterminent les hommes, la curiosité est souvent un aussi grand motif pour exciter leurs recherches.

Ce qui a dû contribuer encore au progrès de la Géométrie, c'est le goût qu'on a naturellement pour cette précision rigoureuse, sans laquelle l'esprit n'est jamais satisfait.

Aussi lorsqu'en mesurant les figures, on s'est apperçu que dans une infinité de cas, les échelles & les demi cercles ne donnoient que des valeurs approchées des lignes ou des angles, on a cherché des méthodes qui suppléassent au défaut de ces instrumens.

Ici nous reprendrons les figures rectilignes; mais dans les opérations que

nous ferons pour découvrir leurs justes rapports, nous ne nous servirons que de la règle & du compas.

Il arrive souvent qu'on a besoin ou de rassembler dans une même figure, plusieurs figures qui lui soient semblables, ou de décomposer une figure en d'autres figures de même espèce; ce qu'on peut faire en opérant d'abord sur les rectangles, puisque toutes les figures rectilignes ne sont que des assemblages de triangles, & que chaque triangle est la moitié d'un rectangle qui a même hauteur & même base.

I.

POUR comparer les rectangles, il faut sçavoir changer un rectangle quelconque en un autre qui ait la même superficie, mais dont la hauteur soit différente. Car lorsque deux rectangles seront changés en deux autres de même hauteur, ils ne différencieront plus que par leurs bases; le plus grand sera celui

qui aura la plus grande base, & il contiendra le plus petit de la même manière que sa base contiendra celle du plus petit rectangle ; ce qu'on énonce ordinairement ainsi : Deux rectangles qui ont même hauteur, sont en même raison que leurs bases.

Deux rectangles qui ont même hauteur, sont en même raison que leurs bases.

II.

POUR ajouter ces deux rectangles, il ne faudra que les poser l'un à côté de l'autre.

III.

IL ne sera pas plus difficile de retrancher le plus petit du plus grand.

IV.

ET pour partager un rectangle en un nombre déterminé de rectangles égaux, il faudra couper sa base en un pareil nombre de parties égales, ensuite élever des perpendiculaires sur les points de division.

V.

MAINTENANT soit proposé de changer le rectangle ABCD en un autre BFEG, qui ait la même superficie, & dont la hauteur soit BF, on remarquera que puisque sa valeur sera le produit de sa hauteur par sa base, il faudra que le rectangle cherché BFEG, dont la hauteur sera plus grande que BC, ait sa base plus petite que AB : c'est-à-dire, que si BF, par exemple, est double de BC, il faudra que BG ne soit que la moitié de AB.

Si BF étoit le triple de BC, BG ne seroit que le tiers de AB.

On verroit de même que si BF, au lieu de contenir BC un nombre exact de fois, le contenoit avec fraction, comme deux fois & un tiers, le rectangle BFEG ne pourroit être égal au rectangle ABCD, que sa base BG ne fût aussi contenuë deux fois & un tiers dans la base AB. Et en général, il sera

PL. VII.

FIG. I.

Manière de
changer un
rectangle en
un autre, qui
ait une hau-
teur donnée.

aisé de voir qu'afin que deux rectangles $ABCD$, $BFEG$, soient égaux, il faudra que la base BG de l'un soit contenue dans la base AB de l'autre, comme la hauteur BC dans la hauteur BF .

Il ne s'agira donc plus que de diviser la ligne AB , de manière que AB soit à GB , comme BF à BC ; ce qui se fera (I. Part. Art. XLI.) en menant la ligne FA , & du point donné C , la parallèle CG .

VI.

Seconde manière de changer un rectangle en un autre, dont la hauteur soit donnée.

FIG. 2.

P O U R changer le rectangle $ABCD$ en un autre rectangle $BFEG$, qui ait une hauteur donnée BF , on peut employer une méthode moins naturelle que la précédente, mais plus commode. Ayant prolongé AD , jusqu'à ce qu'elle rencontre en I la droite FEI , menée par le point F , parallèlement à AB , on tirera la diagonale BI , & par le point O , où elle rencontrera le côté DC , on mènera GOE , parallèle à FB ,

& le rectangle BFEG sera égal au rectangle ABCD.

Pour le prouver, il suffira de faire voir qu'en ôtant des rectangles ABCD, BFEG, la partie commune OCBG, le rectangle ADOG égalera le rectangle EOCF.

Or si on fait attention à l'égalité des deux triangles IBF, IBA, on verra qu'en retranchant de ces triangles des quantités égales, les restes seront égaux. Mais le triangle IAB deviendra le rectangle ADOG, si on en retranche les deux triangles IDO, OGB; de même le triangle IBF deviendra le rectangle EOCF, par le retranchement des triangles IEO, OBC, égaux aux deux premiers. Donc les deux rectangles ADOG, EOCF, restes des deux triangles, seront égaux entr'eux, aussi-bien que les rectangles ABCD, BFEG.

VII.

CETTE seconde manière de changer

On démon-
tre rigoureu-
sement que si
deux rectan-
gles sont é-
gaux, la base
du premier
est à la base
du second,
comme la
hauteur du
second à la
hauteur du
premier.

un rectangle en un autre, confirme le principe que suppose la première, & qui auroit pû sembler n'être appuyé que sur une simple induction.

De l'égalité des deux rectangles $ABCD$, $BFEG$, on avoit conclu qu'il falloit que AB fût à BG , comme BF à BC ; c'est ce qu'on peut maintenant prouver par l'Article précédent.

Car les triangles IAB & OGB , étant manifestement semblables, la base AB du grand sera à la base GB du petit, comme la hauteur IA à la hauteur OG , ou comme BF à BC leurs égales. Donc AB sera à GB comme BF à BC , conformément au principe de l'Article V.

VIII.

DE la manière qu'on vient de s'y prendre pour démontrer que de l'égalité des deux rectangles $ABCD$, $BFEG$, il suit que la hauteur BF est à la hauteur BC , comme la base AB , à

la base BG, on démontreroit aussi que lorsque quatre lignes BF, BC, AB, BG, seront telles que la première sera à la seconde, comme la troisième à la quatrième; le rectangle qui auroit pour hauteur & pour base la première & la quatrième de ces lignes, seroit égal au rectangle qui auroit pour hauteur & pour base la seconde & la troisième.

Si quatre lignes sont telles que la première soit à la seconde, comme la troisième à la quatrième, le rectangle formé par la première & par la quatrième sera égal à celui que forment la seconde & la troisième.

IX.

LORSQUE quatre quantités, ainsi que les lignes précédentes BF, BC, AB, BG, sont telles que la première est la seconde, comme la troisième à la quatrième, on dit que ces quatre quantités sont en proportion, ou qu'elles forment une proportion. Ainsi, 6, 9, 18, 27, sont en proportion, parce que 6 est contenu dans 9, de la même manière que 18 est contenu dans 27. Il en est de même de 15, 25, 75, 125, &c.

Quatre quantités, dont la première est à la seconde, comme la troisième à la quatrième, sont dites former une proportion.

X.

Des quatre termes d'une proportion, le premier & le quatrième, sont nommés extrêmes ; on nomme moyens le second & le troisième.

LA première & la quatrième des quatre quantités d'une proportion, s'appellent termes extrêmes, ou simplement extrêmes ; la seconde & la troisième se nomment termes moyens, ou simplement, moyens.

En se servant des définitions précédentes, il est clair que les propositions renfermées dans les Articles VII. & VIII. s'énonceront ainsi.

X I.

Dans une proportion, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.

LORSQUE quatre quantités sont en proportion, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.

X I I.

Si le produit des extrêmes est égal au produit des moyens les quatre termes forment une proportion.

SI quatre quantités sont telles que le produit des extrêmes soit égal au produit des moyens, ces quatre quantités feront en proportion.

XIII.

IL est à propos de faire beaucoup d'attention aux deux Articles précédens ; ils font d'un grand usage : on en déduit , entr'autres choses , la démonstration de la règle qu'on appelle en Arithmétique , Règle de trois. Pour donner une idée de cette règle , nous De-là on tire la règle de trois , prendrons un exemple ; c'est la manière la plus simple de se faire entendre.

Supposons que 24 Ouvriers aient fait 30 toises d'ouvrages en un certain temps , on demande combien 64 Ouvriers en feront dans un temps égal.

Il est évident que pour résoudre la question , il faut trouver un nombre qui soit à 64 , dans la même raison que 30 à 24. Or , suivant ce que nous avons vû , ce nombre sera tel que son produit par 24 égalera le produit de 30 par 64. Mais le produit de 30 par 64 est 1920. Donc le nombre cherché sera celui qui étant multiplié par 24 donnera 1920.

Fij

Or pour peu qu'on ait d'idée des opérations de l'Arithmétique, on doit aisément s'appercevoir qu'il faudra que ce nombre soit le quotient de la division de 1920 par 24, c'est-à-dire 80.

Ou la manière de trouver le quatrième d'une proportion, dont les trois premiers sont donnés.

En général, pour trouver le quatrième terme d'une proportion, dont les trois premiers seront donnés, il faudra prendre le produit du second & du troisième, & diviser ce produit par le premier terme de la proportion.

XIV.

UN exemple aussi simple que celui que nous venons de choisir, ne fait peut-être pas assez sentir la nécessité de la méthode précédente. Le bon sens seul feroit trouver le nombre demandé. On voit que 30 surpasse 24 d'un quart, & qu'ainsi il faut que le nombre cherché surpasse 64 d'un quart; ce qui donne 80. Mais il y a des cas où l'on pourroit chercher plus longtemps le rapport des deux premiers nombres de la proportion.

Par exemple, on veut un quatrième terme proportionnel aux trois nombres 259, 407, 483.

Pour le trouver par la méthode précédente, il faut multiplier 483 par 407, & diviser 196581, qui en est le produit par 259; ce qui donne 759 pour le quatrième terme cherché.

Si on s'y étoit pris autrement pour trouver ce terme, ce n'auroit pû être qu'en tâtonnant. On auroit bien pû découvrir, par exemple, que 148, excès de 407 sur 259, contient quatre des septièmes parties de 259; qu'ainsi il falloit ajoûter de même à 483, le nombre 276, qui contient quatre des septièmes parties. Mais la généralité & la sûreté de la méthode précédente, nous sauve toujours de l'embarras des tâtonnemens, qui même deviendroient inutiles dans bien des cas.

XV.

LORSQU'ON aura deux quarrés à

ajouter , leur addition se fera de la même manière que celle de deux rectangles , puisque les quarrés sont des rectangles dont la hauteur & la base sont égales. On changera donc un des quarrés ; le plus petit , par exemple , en un rectangle qui aura le côté du grand pour hauteur , & les deux quarrés ne feront plus qu'un rectangle. On pourroit donner de même la hauteur du petit quarré à tous les deux , ou une autre hauteur à volonté ; mais ce qu'on ne pouvoit guères manquer de se proposer , lorsqu'on a voulu réduire ainsi deux quarrés en une seule figure , c'étoit de faire un quarré égal à deux autres. Problême dont il étoit aisé de trouver la solution suivante.

XVI.

SUPPOSONS d'abord que les deux quarrés $ABCD$, $CBFE$, dont on se propose de faire un seul quarré , soient égaux entr'eux ; il est aisé de remarquer

FIG. 3.
Faire un
quarré dou-
ble d'un au-
tre.

que si on tire les diagonales AC & CF, les triangles ABC & CBF, feront ensemble la valeur d'un quarré. Donc en transportant au-deffous de AF les deux autres triangles DCA & CEF, on fera le quarré ACFG, dont le côté AC fera la diagonale du quarré ABCD, & dont la superficie égalera celle des deux quarrés propofés; ce qui n'a pas besoin d'être démontré.

XVII.

SUPPOSONS présentement qu'on veuille faire un quarré égal à la somme des deux quarrés inégaux ADCd, CFEf, ou, ce qui revient au même, qu'on se propose de changer la figure ADFEfd en un quarré.

FIG. 4.

Faire un quarré égal à deux autres pris ensemble.

En suivant l'esprit de la méthode précédente, on cherchera s'il n'est point possible, de trouver dans la ligne DF, quelque point H, tel,

1°. Que tirant les lignes AH & HE, & faisant tourner les triangles ADH,

EFH, autour des points A & E, jusqu'à ce qu'ils ayent les positions *Adh*, *Efh*; ces deux triangles se joignent en *h*.

2°. Que les quatre côtés AH, HE, *Eh*, *hA*, soient égaux & perpendiculaires les uns aux autres.

Or ce point H se trouvera en faisant DH égal au côté CF ou EF. Car de l'égalité supposée entre DH & CF, il suit premierement que si on fait tourner ADH autour de son angle A, en sorte qu'on lui donne la position *Adh*, le point H arrivé en *h* sera distant du point C d'un intervalle égal à DF.

De la même égalité supposée entre DH & CF, il suit encore que HF égalerà DC, & qu'ainsi le triangle EFH tournant autour de E pour prendre la position *Efh*, le point H arrivera au même point *h*, distant de C d'un intervalle égal à DF.

Donc la figure ADFE*fd* sera changée en une figure à quatre côtés AHE*h*.

Il ne s'agit donc plus que de voir si les quatre côtés seront égaux & perpendiculaires les uns aux autres.

Or l'égalité de ces quatre côtés est évidente, puisque Ah & hE seront les mêmes que AH & HE , & que l'égalité de ces deux derniers se tirera de ce que DH étant égale à CF ou à FE , les deux triangles ADH , HEF , seront égaux & semblables.

Il ne reste donc plus qu'à voir si les côtés de la figure $AHEh$ formeront des angles droits; c'est de quoi il est aisé de s'assurer, en remarquant que pendant que HAD tournera autour de A , pour arriver en hAd , il faudra que le côté AH fasse le même mouvement que le côté AD . Or le côté AD fera un angle droit DAd , en devenant Ad . Donc le côté AH sera aussi un angle droit HAh en devenant Ah .

Quant aux autres angles H , E , h , il est visible qu'ils seront nécessairement droits. Car il ne seroit pas possible

qu'une figure terminée par quatre côtés égaux eût un angle droit, sans que les trois autres fussent pareillement droits.

XVIII.

Si on remarque que les deux carrés $ADCd$, $CFEf$ sont faits, l'un sur AD , moyen côté du triangle ADH , l'autre sur EF , égal à DH , petit côté du même triangle ADH ; & que le carré $AHEh$, égal aux deux autres, est décrit sur le grand côté AH , qu'on nomme communément l'hypoténuse du triangle rectangle; on découvrira bien-tôt cette fameuse propriété des triangles rectangles, que le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés faits sur les deux autres côtés.

L'hypoténuse d'un triangle rectangle est son grand côté.

Et le carré de ce côté est égal à la somme des carrés faits sur les deux autres.

XIX.

FIG. 5. & 6. DONC lorsque de deux carrés $HDKL$, $ABCD$, on n'en voudra faire qu'un seul, il sera inutile de les mettre à côté l'un de l'autre, & de les décom-

[D'où se tire une manière simple de réduire deux carrés en un seul.

poser, comme on a fait dans l'Article XVII. Il suffira de placer leurs côtés AD, DH, de façon qu'ils fassent un angle droit, & de tirer ensuite la ligne AH, puisqu'alors cette ligne fera le côté du quarré cherché AHIE.

FIG. 7.

XX.

Si on avoit deux figures semblables DAFGM, DHPON, & qu'on se proposât d'en faire une troisième, égale en superficie aux deux autres prises ensemble, il ne faudroit que poser les bases AD, HD de ces figures, sur les deux côtés d'un angle droit ADH, & l'hypoténuse AH du triangle ADH seroit la base de la figure demandée.

FIG. 8. & 9.

FIG. 10.

Si les côtés d'un triangle rectangle servent de bases à trois figures semblables, la figure faite sur l'hypoténuse égalera les deux autres prises ensemble.

Pour en voir la raison qu'on imagine les quarrés ABCD, DHKL, AHIE, faits sur les bases des trois figures semblables, on verra d'abord par l'Article XVIII. que le quarré AHIE vaudra lui seul les deux autres quarrés ABCD, DHKL. Or les figures

semblables font entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues, (I. Part. Art. XLVII.). Donc les trois quarrés ABCD, DHKL, AHIE, se trouveront les mêmes parties des figures DAFGM, DHPON, AHQRS.

D'où il fera aisé de conclure que la figure AHQRS vaudra les deux autres. Supposons, par exemple, que chacun de ces quarrés fût la moitié de la figure dans laquelle il seroit renfermé, personne ne douteroit que la figure AHQRS ne fût égale aux deux autres, puisque sa moitié vaudroit seule les moitiés des deux figures DHPON, DAFGM. Il en seroit de même si les quarrés ABCD, DHKL, AHIE, étoient les deux tiers, les trois quarts, &c. des figures DAFGM, DHPON, AHQRS.

X X I.

Si on se propoisoit d'ajouter trois

quatre , &c. figures semblables , ou , ce qui revient au même , trois , quatre , &c. quarrés , la méthode seroit toujours la même. Qu'on voulût , par exemple , en ajoûter trois , on feroit d'abord un quarré égal aux deux premiers ; ensuite à ce nouveau quarré on ajoûteroit le troisiéme , & par-là on auroit un quarré égal aux trois quarrés proposés.

Réduire
plusieurs fi-
gures sem-
blables à une
seule.

XXII.

DE - là il suit que si on se propo-
soit de faire un quarré , cinq , six , &c.
fois plus grand qu'un autre , il suffiroit
de suivre la méthode précédente pour
résoudre ce probléme , & même son
inverse ; c'est-à-dire , pour faire un quar-
ré qui ne seroit que la cinquiéme , la
sixième , &c. partie d'un quarré propo-
sé ; ce qui demanderoit simplement
qu'on se rappellât la manière de trou-
ver une quatriéme proportionnelle à
trois lignes données. Mais dans la

troisième Partie de cet Ouvrage, nous donnerons une méthode plus directe & plus commode pour résoudre ces sortes de problèmes.

X X I I I.

L'ADDITION des figures semblables fournit une preuve décisive de la nécessité d'abandonner les échelles, quand on veut faire les opérations d'une manière qui puisse se démontrer rigoureusement.

Supposons, par exemple, qu'on eût à faire un carré double d'un autre, ceux qui ne sçauroient par la méthode donnée dans l'Article XVI. s'y prendroient vraisemblablement de la manière suivante.

Ils diviseroient le côté du carré donné dans un grand nombre de parties, en 100 parties par exemple; ensuite multipliant 100 par 100, ils trouveroient 10000 pour la valeur du quar-

ré ; ce qui donneroit 20000 pour celle du quarré demandé.

Mais de la valeur de celui-ci, ils ne tireroient pas la manière de le décrire ; il faudroit qu'ils eussent son côté exprimé par un nombre, & que ce nombre fût tel qu'en le multipliant par lui-même ; c'est-à-dire, en le quarrant, le produit donnât 20000.

Or le nombre dont ils auroient besoin, ce seroit en vain qu'ils le chercheroient sur une échelle dont les parties seroient des centièmes du côté du premier quarré ; car 141, multiplié par lui-même, donneroit 19881, & 142 donneroit 20164 ; ce qui s'écarteroit de part & d'autre du nombre qu'ils devroient trouver.

Peut-être pourroient-ils croire qu'en partageant le côté du quarré donné en plus de 100 parties, ils trouveroient un nombre déterminé de ces parties pour le côté du quarré double du premier ; mais quelques essais qu'ils

Le produit qui résulte de la multiplication d'un nombre par lui-même est le quarré de ce nombre.

pûssent faire , ils trouveroient toujourns que ce feroit en vain qu'ils chercheroient deux nombres , dont l'un exprimeroit le côté ; ou , suivant le langage ordinaire , la racine d'un carré , & l'autre , le côté , ou la racine du carré double.

La racine d'un carré , est le nombre qui , multiplié par lui-même , donne le carré.

X X I V.

EN effet , on démontre en Arithmétique , que si deux nombres ne sont pas multiples l'un de l'autre ; c'est-à-dire , si l'un ne contient pas l'autre un nombre exact de fois , le carré du plus grand ne sera pas , non plus , multiple du carré du plus petit. Ainsi 5 , par exemple , ne pouvant pas se diviser exactement par 4 , son carré 25 ne pourra pas , non plus , se diviser par 16 carré de 4.

Un nombre est multiple d'un autre , lorsqu'il le contient plusieurs fois exactement ;

Donc si on carre deux nombres , dont l'un soit plus grand que l'autre , & en soit cependant moins quele double , il viendra , par cette opération ,
deux

deux autres nombres , dont l'un fera moindre que le quadruple de l'autre , mais fans en pouvoir être ni le double, ni le triple. Donc , qu'on divise le côté d'un quarré en tel nombre de parties qu'on voudra , le côté du quarré double , qui , fuivant ce qui est démontré dans l'Article XVI. fera la diagonale de ce quarré , ne contiendra pas un nombre exact de ces mêmes parties ; ce qu'on exprimeroit dans le langage des Géomètres , en difant , que le côté du quarré & fa diagonale font incommenfurables.

Le côté d'un quarré & fa diagonale , font incommenfurables.

XXV.

ON peut encore remarquer qu'il y a quantité d'autres lignes qui n'ont aucune commune mefure.

Autres lignes incommenfurables.

Car , qu'on écrive les deux suites ,

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,
&c.

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81,
&c.

G.

dont la première exprime les nombres naturels, & l'autre leurs quarrés; on verra que comme les nombres qui seront entre 4 & 9, entre 9 & 16, entre 16 & 25, &c. n'auront aucune racine, les côtés de deux quarrés, dont l'un sera ou triple, ou quintuple, ou sextuple, &c. seront incommensurables entr'eux.

X X V I.

M A I S de ce que plusieurs lignes sont incommensurables avec d'autres, peut-être pourroit-il naître quelque soupçon sur l'exactitude des propositions qui nous ont servi à constater la proportionalité des figures semblables. On a vû qu'en comparant ces figures (I. Part. Art. XXXIV. & f.), nous avons toujours supposé, qu'elles avoient une échelle qui pouvoit également servir à mesurer toutes leurs parties : Supposition qui maintenant paroîtroit devoir être limitée, à cause de ce qui vient d'être dit; il faut donc que nous reve-

nions sur nos pas, & que nous examinions si nos propositions, pour être vraies, n'auroient pas elles-mêmes besoin de quelques modifications.

XXVII.

REPRENONS d'abord ce qui est dit dans l'Article XXXIX. de la première Partie ; & voyons s'il est exactement vrai que les triangles tels que abc , ABC , dont les angles sont les mêmes, ayent leurs côtés proportionnels. Supposons, par exemple, que la base du premier étant ab , celle du second soit une droite AB , égale à la diagonale d'un quarré dont ab seroit le côté ; & cherchons si, dans cette supposition, le rapport de AC à ac , fera le même que celui de AB à ab .

FIG. 11.
& 12.

Quoique, suivant ce que nous avons vû, quelque grand que pût être le nombre des parties qu'on supposeroit arbitrairement dans ab , AB ne pourroit jamais contenir un nombre exact de ces

parties , il est cependant aisé de s'apercevoir que plus ce nombre sera grand , plus AB approchera d'être mesuré exactement avec les parties de *ab*. Supposons *ab* divisé en 100 parties ; ce que AB contiendra de ces parties se trouvera entre 141 & 142 (Article XXIII.). Contentons-nous de 141 , & négligeons le petit reste. Il est clair (I. Part. Art. XXXIX.) que AC contiendra aussi 141 des parties de *ac*.

Supposons ensuite *ab* divisé en 1000 parties ; ce que AB contiendra des parties de *ab* , sera entre 1414 & 1415 ; ne prenons que 1414 , & négligeons encore le reste , on trouvera de même que AC contiendra 1414 des millièmes parties de *ac* , & qu'en général AC contiendra toujours autant de parties de *ac* , avec un reste , que AB contiendra de parties de *ab* , avec un reste.

De plus , ces restes comme nous venons de l'observer , seront de part & d'autre , d'autant plus petits , que

le nombre des parties de ab sera grand. Donc il sera permis de les négliger, si on imagine la division de ab poussée jusqu'à l'infini. Donc on pourra dire alors que le nombre des parties de ac que contiendra AC égalera le nombre des parties de ab que contiendra AB, & qu'ainsi AC sera à ac , comme AB à ab .

Donc nous avons rigoureusement démontré que lorsque deux triangles ont les mêmes angles, ils ont leurs côtés proportionnels, soit que leurs côtés ayent une commune mesure, ou qu'ils n'en ayent pas.

La proposition (I. Part. Art. XLV.) d'où se tire la proportionnalité des lignes qui se répondent dans les figures semblables, se justifieroit de la même façon.

Les triangles & les figures semblables, ont leurs côtés proportionnels, lors même que ces côtés sont incommensurables.

XXVIII.

ON verra, par de pareils raisonnemens, que les propositions expli-

quées dans les Articles XLIV. & XLVII. de la premiere Partie , où l'on a fait voir que les aires des triangles & des figures semblables , ont entr'elles la même proportion que les quarrés de leurs côtés homologues , sont toujours vraies en général , même lorsque les côtés de ces figures sont incommensurables.

Et ces figures sont toujours entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues.

Prenons pour exemple les triangles semblables ABC, abc , dont nous supposons les hauteurs incommensurables, avec leurs bases ; dans ce cas, il n'y aura aucun quarré, quelque petit qu'il soit , qui puisse servir de commune mesure à ces triangles , & aux quarrés faits sur leurs bases ; c'est-à-dire , que les aires abc & $abde$ feront incommensurables entr'elles , ainsi que les aires ABC & $ABDE$; mais il n'en fera pas moins vrai que le triangle ABC sera au quarré $ABDE$, comme le triangle abc au quarré $abde$.

C'est de quoi on s'assurera , en obser-

vant que plus les parties de l'échelle, dont on se servira pour mesurer AB & CK seront supposées petites, plus on approchera d'avoir les nombres qui exprimeront le rapport de ABC à $ABDE$. Donc divisant toujours l'échelle du triangle abc dans le même nombre de parties, & négligeant les restes, on verra que les mêmes nombres serviroient toujours à exprimer le rapport du triangle ABC au carré $ABDE$, & celui du triangle abc au carré $abde$. Qu'on pousse, par la pensée, la division des échelles jusqu'à l'infini, les restes deviendront absolument nuls; & l'on pourra dire, que les nombres qui exprimeroient le rapport du triangle abc au carré $abde$, exprimeroient aussi le rapport du triangle ABC au carré $ABDE$, & qu'ainsi le triangle abc fera au carré $abde$, comme le triangle ABC au carré $ABDE$.

Il en feroit de même de toutes les figures semblables.



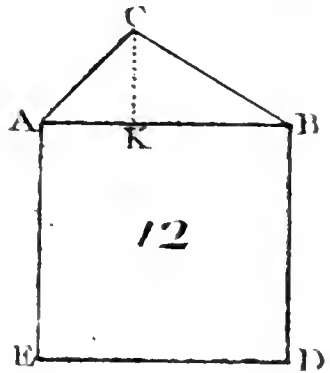
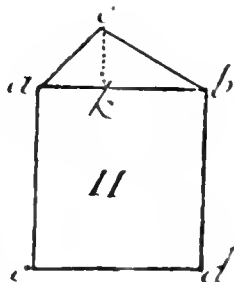
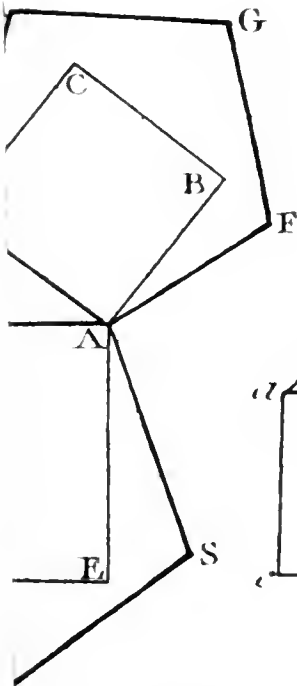
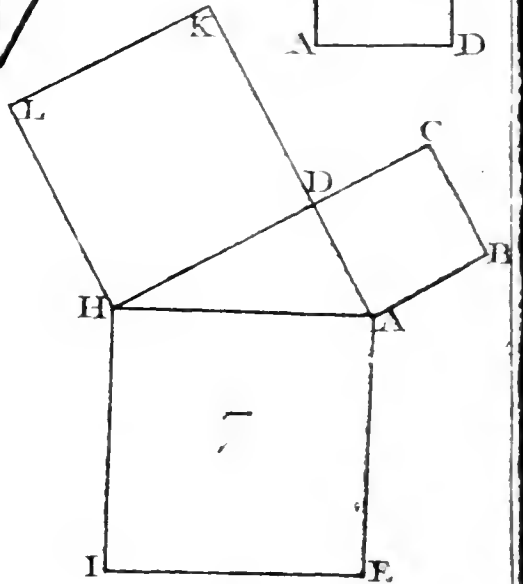
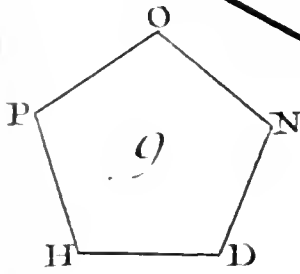
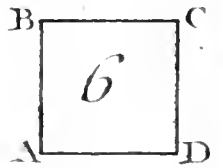
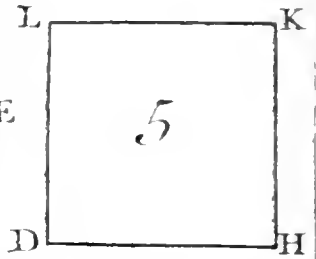
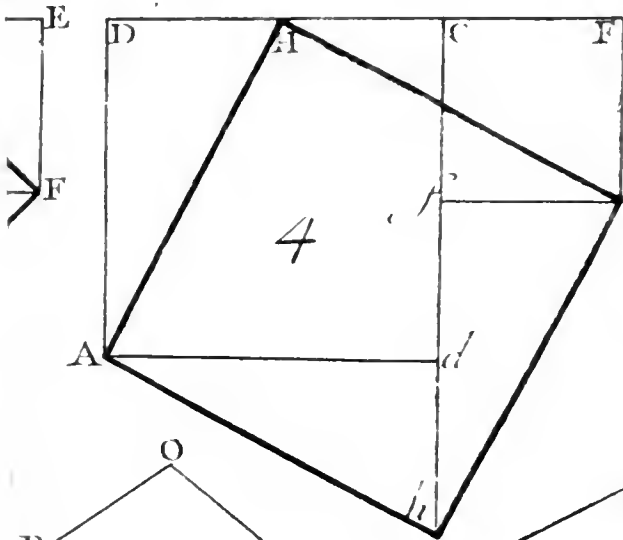
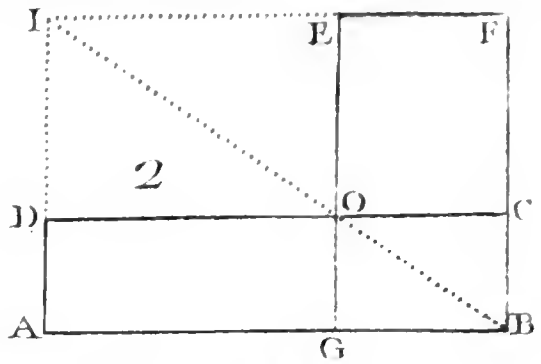
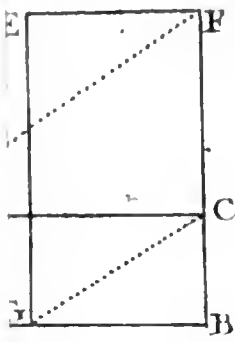
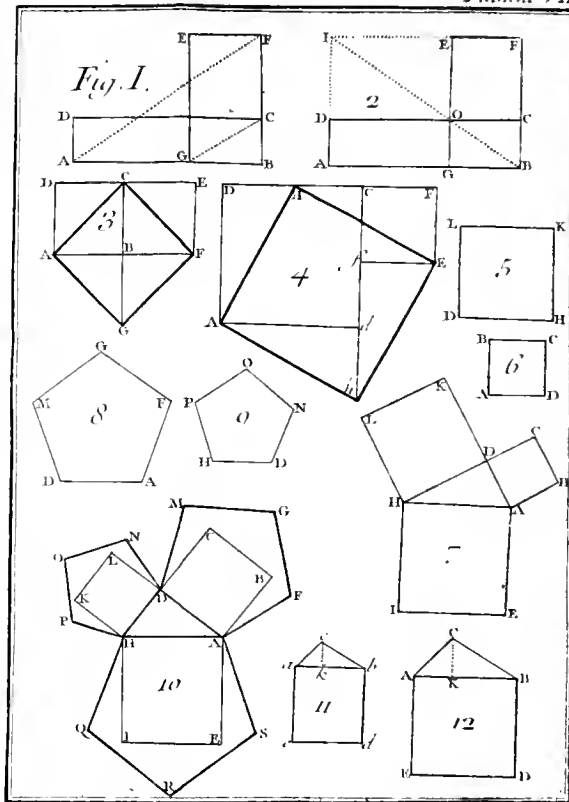


Fig. I.





E L E M E N S D E G E O M E T R I E .

TROISIEME PARTIE.

*De la mesure des figures circulaires,
& de leurs propriétés.*



PRE's être parvenu à mesurer toutes sortes de figures rectilignes, on a voulu avoir la manière de déterminer celles que bornent des lignes courbes. Les Terrains, & en général, les espaces dont il s'agit de chercher la mesure, ne sont

pas toujours terminés par des lignes droites.

Souvent les figures curvilignes, & les figures mixtes, c'est-à-dire, celles qui sont bornées par des lignes droites, & par des lignes courbes, peuvent se réduire à des figures entièrement rectilignes, comme nous l'avons déjà dit; car qu'on eût à mesurer une figure telle que ABCDEFG, **PL.VIII.** on pourroit prendre le côté AD pour un assemblage de deux, de trois, &c. lignes droites, substituant en suite la droite FD à la courbe FED, on auroit la figure rectiligne ABCDFG, **FIG. I.** qui différencieroit si peu de la figure mixte, que l'une pourroit être prise pour l'autre, sans erreur sensible.

On opéreroit donc sur ces figures, en suivant les méthodes précédentes: mais les Géomètres ne s'accommoderoient guères de ces sortes d'opérations; ils n'en veulent que de rigoureuses: d'ailleurs, il y a tel cas, où

la transformation d'une figure curviligne , ou mixte , en une figure entièrement rectiligne , demanderoit qu'on partageât son contour en un si grand nombre de parties , qu'alors la méthode commune deviendrait impraticable ; aussi ne seroit-on pas tenté de la suivre , si on avoit à mesurer un espace tel que Z (Fig. 7.) , ou le cercle entier X (Fig. 3.) , il faudroit prendre une autre voie pour trouver la mesure de ces sortes d'espaces. Ici nous ne nous attacherons qu'à ceux dont les contours renferment des arcs de cercle.

I.

SUPPOSONS d'abord qu'on ait l'aire du cercle X à mesurer. On observera qu'en lui inscrivant un poligone régulier BCDE &c. plus ce poligone aura de côtés , plus il approchera d'être égal au cercle. Or on a vû que l'aire de cette figure (I. Part.

FIG. 3.

(Art. XXII.) est égale à autant de fois le produit du côté BC par la moitié de l'apothème AH, que le poligone a de côtés ; ou , ce qui revient au même , que cette aire a pour mesure le produit du contour entier BCDE &c. par la moitié de l'apothème. Donc puisqu'en poussant jusqu'à l'infini le nombre des côtés du poligone , son aire , son contour , son apothème ; égaleront l'aire , le contour & le rayon du cercle ; la mesure du cercle sera le produit de sa circonférence par la moitié de son rayon.

La mesure du cercle , est le produit de sa circonférence par la moitié de son rayon.

I I.

IL suit de-là que la superficie d'un cercle BCD , est égale à celle d'un triangle ABL , dont la hauteur seroit le rayon AB , & la base une droite BL égale à la circonférence.

L'aire du cercle est égale à un triangle dont la hauteur est le rayon , & la base une droite égale à la circonfé-

I I I.

IL ne s'agit donc que d'avoir le

rayon & la circonférence. A l'égard du rayon, il est aisé de le mesurer; il n'en est pas de même de la circonférence : cependant, pour avoir sa mesure, on peut envelopper le cercle, d'un fil; ce qui dans beaucoup d'occasions suffit pour la pratique.

Mais, jusqu'à présent, on n'a pu parvenir à mesurer géométriquement la circonférence du cercle; c'est-à-dire, à déterminer exactement le rapport qu'elle a avec le rayon. On trouve ce rapport à des cent-millièmes, à des millionièmes près, & même on en approche tant qu'on veut, sans que pour cela, on puisse le déterminer rigoureusement.

IV.

L'APPROXIMATION la plus simple qu'on ait trouvée, est celle qu'on tient d'Archimède. Le diamètre ayant 7 parties, ce que la circonférence contient de ces parties est entre

Le diamètre
d'un cercle
ayant 7 par-

ties, la cir-
conférence
en a près de
22.

21 & 22 ; & l'on sçait qu'elle approche beaucoup plus de 22 que de 21.

V.

A U reste, il est clair que si on sçavoit exactement le rapport d'une seule circonférence à son rayon, on sçauroit celui de toutes les autres circonférences à leurs rayons ; ce rapport devant être le même dans tous les cercles : proposition qui paroît si simple, qu'elle n'a pas besoin d'être démontrée, puisqu'on sent que quelles que fussent les opérations qu'on auroit faites pour mesurer une circonférence, en se servant des parties de son rayon, il faudroit qu'on fit les mêmes opérations, pour mesurer toute autre circonférence ; qu'ainsi, on lui trouveroit le même nombre de parties de son rayon.

Les circon-
férences des
cercles, sont
entr'elles,
comme leurs
rayons.

VI.

I L est évident que les cercles ont encore la propriété générale de tou-

tes les figures semblables (I. Part. Art. XLVII.) ; je veux dire , que leurs surfaces sont en même proportion que les quarrés de leurs côtés homologues : mais comme , pour appliquer cette proposition aux cercles, on ne pourra prendre leurs côtés , il faudra se servir des rayons ; alors on verra que les cercles auront leurs aires proportionnelles aux quarrés de leurs rayons.

Les aires des cercles sont proportionnelles aux quarrés de leurs rayons.

S'il ne paroïssoit pas d'abord que cette proposition dût suivre de ce qui est dit dans l'Article XLVII. de la premiere Partie , & qu'on voulût en avoir une démonstration particuliere , on feroit attention qu'il reviendroit absolument au même , de comparer les aires de deux cercles BCD , EFG , ou celles des triangles ABL , AEM , qui leur seroient égaux (Article II.) en supposant que leurs bases BL & EM , fussent les développemens des circonferences BCD & EFG , & que leurs hauteurs fussent les rayons AB & AE.

FIG. 4. & 5.

Or par l'Article précédent, ces triangles feroient semblables ; donc leurs aires feroient en même proportion que les quarrés de leurs côtés homologues AB, AE, rayons des cercles BCD & EFG. Donc, &c.

VII.

LES cercles, à cause de leur similitude, auront aussi, de même que les figures semblables, cette propriété, que si, en prenant les trois côtés d'un triangle rectangle pour rayons, on décrit trois cercles, celui dont le rayon fera l'hypoténuse, égalera les deux autres pris ensemble.

Des trois cercles qui ont pour rayons les trois côtés d'un triangle rectangle, celui que donne l'hypoténuse vaut les deux autres pris ensemble.

Ainsi, on pourra toujours trouver un cercle égal à deux cercles donnés, & cela sans prendre la peine de mesurer chacun de ces cercles. Qu'on veuille, par exemple, faire un bassin qui contienne autant d'eau que deux autres, la profondeur étant la même ; qu'on veuille trouver l'ouverture d'un tuyau

tuyau de fontaine, par lequel il s'écoule autant d'eau que par deux tuyaux donnés; on y réussira sans peine, en prenant la voie que nous venons d'indiquer.

VIII.

Si on avoit à mesurer la superficie d'une couronne V, figure enfermée entre deux cercles concentriques EFG, BCD; c'est-à-dire, entre deux cercles, qui auroient un centre commun; ce qui se présenteroit d'abord, ce seroit de mesurer séparément les superficies des deux cercles, & de retrancher la plus petite de la plus grande. Mais il est aisé de s'apercevoir que le problème peut se résoudre d'une manière plus commode pour la pratique.

Imaginons un triangle ABL, qui ait le rayon AB pour hauteur, & dont la base soit une droite BL, égale à la circonférence BCD. Si on mène par le

H

FIG. 6.

Une couronne est l'espace enfermé entre deux cercles concentriques.

point E, la droite EM parallèle à BL, cette droite fera égale à la circonférence EFG; car à cause de la similitude des triangles AEM, ABL, il y aura même proportion entre AB & BL, qu'entre AE & EM. Or par la supposition, BL égalera la circonférence dont AB fera le rayon. Donc EM égalera aussi la circonférence qui aura pour rayon la ligne AE, partie de AB. Il en feroit de même de toute autre ligne KI, parallèle à BL; elle feroit toujours égale à la circonférence dont AK feroit le rayon.

De l'égalité supposée entre la circonférence EFG, & la droite EM, suit nécessairement l'égalité du triangle AEM au cercle EFG; donc il faut que l'espace rectiligne EBLM, soit égal à la couronne proposée V. Or cet espace EBLM, se peut aisément changer en un rectangle EBPH, en coupant ML en deux parties égales MI & IL, & en menant à BL par le point I

la perpendiculaire HIP, qui donnera le triangle ajoûté MHI, égal au triangle retranché PLI.

Donc si par le point I on mène à BL la parallèle IK, qui coupera EB en deux parties égales, la couronne proposée, égale à l'espace EBLM ou à EBPH, aura pour mesure le produit de EB par KI, circonférence dont AK sera le rayon.

Donc pour mesurer une couronne V, il faut multiplier sa largeur EB par la circonférence KOQ, dite moyenne entre les circonférences BCD & EFG, parce qu'elle surpasse la petite circonférence EFG, ou la droite EM, d'une quantité MH, égale à PL, quantité dont elle est surpassée par la grande circonférence BCD, ou par la droite BL.

Pour mesurer une couronne, il faut multiplier sa largeur par la circonférence moyenne.

IX.

LORSQU'IL s'agira de mesurer une figure Y, composée d'arcs de cercles

FIG. 2.

H ij

différens , & de lignes droites ; ou

FIG. 7. une figure Z , uniquement composée d'arcs de cercles ; toute la difficulté

Le segment de cercle est un espace terminé par un arc & par sa corde.

se réduira à mesurer des segments de cercle ; c'est-à-dire , des espaces tels que ABCE* , terminés par un arc ABC & par la corde AC. Car les figures

* FIG. 8.

La mesure de toutes les figures circulaires se réduit à celle du segment.

entièrement composées d'arcs de cercles , ou d'arcs & de lignes droites ; peuvent toutes être considérées comme des figures rectilignes , augmentées ou diminuées de certains segments.

X.

LA mesure d'un segment quelconque ABCE est facile à trouver , lorsqu'on sçait celle du cercle ; car qu'on tire les lignes AT , CT , au centre T de l'arc , on formera une figure ABCT , appelée secteur , dont l'aire sera au cercle , comme l'arc ABC à la circonférence entière , & qui , par conséquent , aura pour mesure le produit de la moitié du rayon AT par l'arc ABC :

Le secteur est une portion de cercle , terminée par deux rayons , & par l'arc qu'ils comprennent.

Sa mesure , & celle du segment.

or le secteur étant déterminé , il ne faudra plus qu'en retrancher le triangle ACT , pour avoir le segment ABCE.

XI.

COMME il arrive assez souvent que lorsqu'on se propose de mesurer une figure telle que Y , on n'a pas le centre de l'arc HIK , & que cependant , sans ce centre , on ne sçauroit mesurer la figure , puisque la méthode précédente exige la connoissance du rayon , il faut que nous cherchions le centre d'un arc de cercle quelconque.

FIG. 2.

Soit ABC * l'arc de cercle proposé , si on prend à volonté deux points A & B sur cet arc , & que de ces points , comme centres , on décrive les quatre arcs *goi* , *foh* ; *lpk* , *mpn* , les deux premiers , d'un rayon quelconque , & les deux autres , ou de ce même rayon , ou de tel autre rayon qu'on voudra ; il est clair que le centre cherché de l'arc ABC , sera sur la ligne *op* , qui join-

Trouver le centre d'un arc de cercle quelconque.

* FIG. 9.

dra les points d'intersections o , p .

Choisissant ensuite un troisième point C , sur l'arc ABC , & se servant de B & de C , de la même manière qu'on s'est servi de A & de B , on aura une droite qr , sur laquelle devra encore se trouver le centre demandé. Donc ce centre sera le point de rencontre T , des lignes op , qr ,

XII.

A INSI, quelqu'arrangement qu'on donne à trois points, pourvu qu'on ne les place pas en ligne droite, on pourra toujours les lier par un arc de cercle, ou, ce qui revient au même, quelle que soit la proportion des côtés AC , BC , d'un triangle ACB , avec sa base, on pourra toujours circoncrire un cercle à ce triangle.

FIG. 10.

XIII.

LA méthode que nous venons de donner, pour circoncrire un cercle à

un triangle, étant appliquée successivement à différens triangles ACB , AEB , AGB , plus ou moins élevés à l'égard de leur base AB , on s'apperçoit qu'en passant d'un triangle ACB , dont l'angle au sommet est fort aigu, à d'autres triangles AEB , AGB , dont l'angle au sommet est plus ouvert; le centre du cercle circonscrit s'approche continuellement de AB , & que ce centre passe ensuite au dessous de AB , lorsque l'angle au sommet AGB a atteint une certaine ouverture. Or voyant passer ce centre au dessous de AB , après l'avoir vu au dessus, il doit venir dans l'esprit, ce me semble, de chercher de quelle espece est le triangle AFB , lorsque le cercle circonscrit a son centre sur AB même.

FIG. 11.

FIG. 12.

Pour connoître ce triangle AFB , on commencera par remarquer que dans ce cas particulier, la portion du cercle circonscrite au triangle doit être exactement un demi-cercle: en effet,

le centre du cercle devant se trouver sur la base AB , dont les deux extrémités sont, par la supposition, dans la circonférence, le centre M ne pourra pas manquer d'être situé précisément au milieu de AB , de sorte que AB sera nécessairement un diamètre.

Si d'un point quelconque de la circonférence d'un demi-cercle, on tire deux droites aux extrémités du diamètre, on aura un angle droit.

On verra ensuite que de quelque point F du demi-cercle, qu'on tire les lignes FA, FB , l'angle AFB sera droit, Car menant FM , les deux triangles AFM, MFB , seront isocèles; donc les deux angles AFM, MFB , seront respectivement égaux aux angles FAM, FBM , ou, ce qui revient au même, l'angle total AFB égalera la somme des deux angles FAM, FBM ; mais les trois angles AFB, FAM, FBM , pris ensemble, valent deux droits. Donc l'angle AFB sera droit.

Ainsi, si on décrit sur la base AB , un triangle rectangle quelconque, ce triangle aura la propriété demandée, d'être inscrit dans un cercle dont le centre est sur la base.

XIV.

CETTE propriété du cercle, que l'angle, qui a son sommet dans la demi-circonférence, & qui est appuyé sur le diamètre, est toujours droit, porte à chercher si les autres parties du cercle n'auroient pas quelque propriété analogue; si, par exemple, les angles ACB , AEB , AFB , pris dans un segment $ACEFB$, ne seroient pas tous égaux entr'eux, ainsi que le sont ceux du demi-cercle.

PL. IX.

FIG. 1.

Pour nous en assurer, nous commencerons par chercher la valeur d'un de ces angles, & nous verrons ensuite si les autres ont la même valeur. Nous prendrons par exemple, l'angle AEB , dont le sommet E est placé au milieu de l'arc AEB . Comme la ligne EDG , qui passe par le centre D , coupe cet angle en deux parties égales, il suffira de mesurer l'angle AEG sa moitié, ou, ce qui revient au même, il suffira de

FIG. 2.

de ſçavoir quelle partie l'angle AEG eſt d'un angle déjà meſuré, tel que ADG ; je diſ que l'angle ADG eſt déjà meſuré, parce que nous ſçavons que l'arc AG eſt ſa meſure (I. Part. Art. LII.).

Si on fait attention que le triangle AED eſt iſocèle, on verra facilement que l'angle AEG eſt la moitié de l'angle ADG ; car les angles AED, EAD (I. Part. Art. XXXI.) ſont égaux : mais (I. Part. Art. LXVIII.) ces deux angles, pris enſemble, valent l'angle extérieur ADG. Donc l'angle AED ou AEG, eſt la moitié de l'angle ADG.

Par la même raiſon, l'angle DEB fera la moitié de l'angle GDB. Donc l'angle total AEB égalera la moitié de l'angle ADB. Donc ſa meſure fera la moitié de l'arc AGB.

X V.

L'ANGLE AEB étant meſuré ; pour ſçavoir ſ'il eſt égal à chacun des

autres angles qui ont leur sommet dans le même segment, il faut examiner si un de ces angles pris à volonté, AFB par exemple, est aussi la moitié de l'angle au centre ADB. On s'en assurera facilement, en tirant la droite FDG par le centre. Car alors on verra que l'angle AFB sera composé de deux autres AFD, DFB, qui seront, par l'Article précédent, les moitiés des angles ADG, GDB, d'où l'on conclura que l'angle total AFB sera la moitié de l'angle ADB; & en appliquant le même raisonnement à tous les angles ACB, AEB, AFB, qui ont leurs sommets à la circonférence, & qui s'appuient sur le même arc AGB, on pourra conclure que ces angles sont égaux entr'eux, ainsi que nous l'avions soupçonné dans l'Article précédent.

FIG. 3.

Tous les angles dont le sommet est à la circonférence, & qui s'appuient sur le même arc, sont égaux, & ont, pour commune mesure, la moitié de l'arc sur lequel ils s'appuient.

FIG. 1.

XVI.

P A R M I les différens angles qui ont leur sommet dans l'arc ACEFB, il y

en a qui pourroient d'abord ne pas paroître compris dans la démonstration précédente ; ce sont des angles AFB , tels, que la droite FDG tirée par le centre, passe hors de l'angle ADB . Cependant, en remarquant toujours que l'angle DFA est la moitié de l'angle GDA , & l'angle DFB , la moitié de l'angle GDB , on verra que l'angle AFB , excès de l'angle DFB sur l'angle DFA , fera, dans ce cas, la moitié de l'angle ADB , excès de l'angle GDB sur GDA .

XVII.

PAR les figures dont nous nous sommes servis, il sembleroit aussi que la démonstration précédente ne conviendroit qu'aux segmens plus grands qu'un demi-cercle ; mais il est aisé de voir qu'un angle quelconque, tel que

FIG. 5. AFB , qui auroit son sommet dans un segment plus petit qu'un demi-cercle, feroit toujours composé de deux autres

DFB, DFA, moitiés des angles BDG, ADG, & par conféquent, que cet angle AFB auroit pour mefure la moitié des deux arcs BG, AG, c'est-à-dire, la moitié de l'arc AGB.

XVIII.

A P R E S avoir vu que dans un même fegment, les angles AEB, AFB, AHB, fupposés à la circonférence, font tous égaux, on eft tenté de chercher ce que devient l'angle AQB, lorsque fon fommet fe confond avec le point B, extrémité de la bafe AB. Cet angle s'évanoüiroit-il alors? Mais il ne paroît pas poffible que fans s'être réferré par degrés, il vienne tout-à-coup à s'anéantir. On ne voit pas quel feroit le point au-delà duquel cet angle cefseroit d'exifter: comment donc parviendra-t-on à en trouver la mefure? c'est une difficulté qu'on ne peut réfoudre, fans recourir à la Géometrie de l'infini, dont tous les hommes ont,

FIG. 62

au moins, une idée imparfaite, qu'il ne s'agit que de développer.

Observons d'abord, que quand le point E s'approche de B , en devenant F , H , Q , &c., la droite EB s'accourcit continuellement, & que l'angle EBA qu'elle fait avec la droite AB , s'ouvre de plus en plus. Mais quelque courte que devienne la ligne QB , l'angle QBA n'en fera pas moins un angle, puisque pour le rendre sensible, il ne faudroit que prolonger la ligne accourcie QB vers R ; en doit-il être de même, lorsque la ligne QB , à force de diminuer, s'est réduite enfin à zero? qu'est devenuë alors sa position? qu'est devenu son prolongement?

Il est évident qu'il n'est autre chose que la droite BS , qui touche le cercle en un seul point B , sans le rencontrer en aucun autre endroit, & que, pour cette raison, on appelle tangente.

La tangente
au cercle, est
la ligne qui

De plus, il est clair que pendant que la ligne EB diminuë continuellement

jusqu'à s'anéantir à la fin, la droite AE , ne le touche qu'en un point.
 qui devient successivement AF , AH , AQ , &c. s'approche toujours de AB , & qu'elle se confond enfin avec elle. Donc l'angle à la circonférence AEB , après être devenu AFB , AHB , AQB , devient en dernier lieu l'angle ABS , fait par la corde AB , & par la tangente BS , & cet angle, qu'on appelle angle au segment, doit toujours conserver la propriété d'avoir pour mesure la moitié de l'arc AGB .

L'angle au segment est celui qui est fait par la corde & par la tangente.

Sa mesure est la moitié de l'arc du segment.

Quoique cette démonstration soit peut-être un peu abstraite pour les Commencans, j'ai cru à propos de la donner, parce qu'il sera très-utile à ceux qui voudront pousser leurs études jusqu'à la Géométrie de l'infini, de s'être accoutumé de bonne heure à de pareilles considérations.

Si cependant les Commencans trouvoient cette démonstration au-dessus de leurs forces, il est aisé de les mettre à portée d'en découvrir une autre, en

leur expliquant la principale propriété des tangentes.

X I X.

FIG. 7. CETTE propriété est qu'une tangente au cercle dans un point quelconque B, doit être perpendiculaire au diamètre IDB, qui passe par ce point. Car comme la courbure du cercle est si uniforme qu'un diamètre quelconque IDB, le partage en deux demi-cercles IAB, IOB, égaux & également situés à l'égard de ce diamètre, il faut que les deux parties BS, BH, de la tangente commune à ces deux demi-cercles, soient aussi également situées à l'égard de ce diamètre: or cela ne sçauroit être sans que IDB ne soit perpendiculaire à la tangente HBS.

La tangente est perpendiculaire au diamètre qui passe par le point d'attouchement.

X X.

DE LA on verra facilement pourquoi l'angle au segment ABS, a pour mesure la moitié de l'arc AGB.

Car

Car l'angle ADB, joint avec les deux angles égaux DAB, DBA, fait (I. Part. Art. LXIV.) deux droits. Donc la moitié de l'angle ADB, joint avec l'angle DBA fait un droit. Mais l'angle DBA, ajouté avec l'angle ABS, donne aussi un droit. Donc l'angle ABS est égal à la moitié de l'angle ADB. Donc la mesure de ABS sera la moitié de l'arc AGB.

X X I.

LA seconde démonstration que nous venons de donner de cette propriété du cercle, que l'angle ABS a pour mesure la moitié de l'arc AGB, fournit la solution du problème suivant.

Décrire sur AB un segment de cercle capable de l'angle donné L ; c'est-à-dire, un segment AFB, dans lequel tous les angles AFB à la circonférence, soient égaux à l'angle L.

Pour résoudre ce problème, il faudra faire en A & en B, les angles BAS

FIG. 8. & 9.

Ce que c'est qu'un segment capable d'un angle donné.

Manière de faire un segment capable

d'un angle
donné.

& ABS , chacun égal à l'angle L ,
& élever sur AS & sur BS , les deux
perpendiculaires AD & BD ; leur ren-
contre D fera le centre de l'arc cher-
ché AFB .

Car par l'Article XIX. les droites
 BS & AS feront les tangentes du cer-
cle dont le centre est D , & le rayon
 AD ou BD , puisque BD ou AD sont
perpendiculaires à BS & à AS . De
plus, par l'Article précédent, l'angle
 ABS a pour mesure la moitié de AGB ,
& par l'Article XV. les angles tels que
 AFB , sont aussi mesurés par la moitié
de AGB . Donc ces angles AFB seront
égaux à ABS ; c'est-à-dire, à l'angle
 L , ainsi qu'on le demandoit.

X X I I.

LA découverte des propriétés des
segmens de cercle, que nous venons
d'expliquer, est due vraisemblablement
à la simple curiosité des Géomètres;
mais il en a été de cette découverte,

comme il en est tous les jours de beaucoup d'autres , ce qu'on ne croyoit pas d'abord utile , le devient par la suite ; on a fait dans la pratique , des applications fort heureuses des propriétés du cercle, que nous venons de démontrer. Je ne donnerai qu'une seule de ces applications ; on la trouvera dans la solution du problème suivant , qui est souvent nécessaire dans la Geographie.

A, B, C, sont trois lieux dont on connoît les distances respectives AB, BC, AC ; il s'agit de sçavoir à quelle distance de ces lieux, est un point D, d'où l'on peut les voir tous les trois ; mais d'où l'on ne peut sortir pour opérer sur le terrain.

On commencera par tracer sur le papier trois points *a*, *b*, *c*, qui soient situés entr'eux de la même manière que les trois points A, B, C, c'est-à-dire en langage géométrique, qu'on fera le triangle *abc* semblable au triangle ABC.

FIG. 10.

Trouver la distance d'un lieu à trois autres dont les positions sont connues.

FIG. 10.
& 11.

Ayant observé ensuite avec le demi-cercle la grandeur des angles ADB , BDC , on fera sur ab , le segment de cercle bda , capable de l'angle ADB , & sur la droite bc , le segment de cercle bdc , capable de l'angle BDC , la rencontre d de ces deux segments désignera sur le papier la position du lieu D , c'est-à-dire, que les lignes da , db , dc , seront en même proportion à l'égard de ab , bc , ac ; que les distances cherchées DA , DB , DC , à l'égard des distances données AB , BC , AC : ce qui n'a pas besoin de démonstration, après ce qu'on a vu sur les figures semblables.

X X I I I.

ON pourroit facilement faire voir que la pratique a tiré bien d'autres secours des propriétés du cercle, qu'on vient de démontrer; mais il est plus à propos de passer à d'autres propriétés du cercle, qui ont été tirées des pré-

cédentes , & qui ont eu aussi leur utilité.

Pour procéder par ordre à la découverte de ces propriétés , nous commencerons par remarquer que deux angles quelconques EDC , EBC , qui s'appuient sur le même arc EC , étant égaux , il s'enfuit que les triangles DAE , BAC , ont les mêmes angles ; c'est-à-dire , (I. Part. Art. XXXIX.) que ces triangles sont semblables.

PL. X.

FIG. I.

Car par la même raison que l'angle EDC est égal à l'angle EBC , l'angle DEB fera égal à l'angle DCB ; & quant aux angles DAE , BAC , ils seront visiblement égaux ; soit parce qu'ils sont faits des mêmes lignes , soit parce que deux triangles , dont l'un a deux angles respectivement égaux , à deux angles de l'autre , ont aussi nécessairement le 3^{me}. angle égal (I. Part. Art. XXXVIII.)

Pour reconnoître plus facilement ensuite dans les triangles ADE , ABC , les propriétés générales des triangles

FIG. 1. & 2. semblables, nous appliquerons le triangle DAE sur le triangle BAC, en posant AD sur AB, & AE sur AC, afin que DE soit parallèle à BC. Nous nous rappellerons alors,

1°. Que si deux triangles ADE, ABC, sont semblables, les quatre côtés AC, AE, AB, AD, sont en proportion; (I. Part. Art. XXXIX.)

2°. Que dans toute proportion, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens (II. Part. Art. VIII.) & nous conclurons de-là, que le rectangle ou le produit de AC par AD, est égal au rectangle de AE par AB; propriété du cercle, très remarquable, & qu'on peut énoncer ainsi: Si dans un cercle on tire à volonté deux droites qui se coupent, le produit des deux parties de la première est égal au produit des deux parties de l'autre.

Deux cordes se coupant dans un cercle, le rectangle des parties de l'une est égal au rectangle des parties de l'autre.

X X I V.

FIG. 3. Si les deux droites BE, DC, se

coupoient perpendiculairement, & que l'une de ces deux droites fût un diamètre DC, il est clair que les deux parties AB, AE, de l'autre droite BE, seroient égales entr'elles ; de sorte que la propriété précédente s'énonceroit ainsi dans ce cas particulier. Si sur le diamètre DC d'un cercle, on élève une perpendiculaire quelconque AB, le quarré de cette perpendiculaire fera égal au rectangle de AD par AC.

Le quarré d'une perpendiculaire quelconque au diamètre d'un cercle, est égal au rectangle des deux parties du diamètre.

XXV.

IL arrive souvent qu'on a besoin de changer un rectangle en un quarré, l'Article précédent en fournit un moyen facile : soit ACFE le rectangle proposé, on prolongera AC en D, de sorte que AD soit égal à AE, & l'on décrira le demi-cercle DBC, dont le diamètre soit DC. Prolongeant ensuite le côté EA jusqu'à ce qu'il rencontre le demi-cercle, on aura AB pour le côté

Changer un rectangle en un quarré.

FIG. 4.

du quarré cherché ABGH , égal au rectangle donné AFCE.

X X V I.

ON propose souvent un problème qui n'est que celui que nous venons de résoudre , présenté autrement. C'est de trouver une ligne qui soit moyenne proportionnelle entre deux lignes données ; on entend alors par la moyenne proportionnelle , la ligne qui est aussi grande , par rapport à la plus petite des deux lignes données , qu'elle est petite par rapport à la plus grande ; c'est-à-dire , que si AB , par exemple , est moyenne proportionnelle entre AD & AC , on pourra dire que AD est à AB , comme AB est à AC. Or il est bien aisé de voir que ce problème est le même que le précédent , puisque (II. Part. Art. VIII.) le produit de AD par AC , c'est-à-dire , le rectangle de ces deux lignes , fera égal au produit

Ce que c'est qu'une moyenne proportionnelle entre deux lignes droites.

de AB par AB, c'est-à-dire, au quarré de AB.

Donc lorsqu'on voudra trouver une

Manière de
la trouver.

moyenne proportionnelle entre deux lignes données, on changera le rectangle de ces deux lignes en un quarré dont le côté fera la ligne cherchée.

XXVII.

ON peut encore trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes, d'une autre manière qui suit de la propriété du cercle expliquée dans l'Article XIII. Supposons que AC soit la plus grande des deux lignes données, & AD la plus petite, on élèvera DB perpendiculairement sur AC, & le point B, où elle rencontrera le demicercle ABC, tracé sur le diamètre AC, donnera la ligne AB, moyenne proportionnelle entre AD & AC. Car en tirant BC, il est clair que le triangle ABC fera rectangle en B. Donc (I. Part. Art. XXXVIII.) ce triangle fera semblable

Autre ma-
nière.

FIG. 5.

au triangle ABD , puisque ces deux triangles ont d'ailleurs l'angle A de commun ; mais si les triangles ADB & ABC font semblables , ils ont leurs côtés proportionnels. Donc AD est à AB, comme AB à AC. Donc AB est moyenne proportionnelle entre AD & AC.

XXVIII.

Changer une
figure rectili-
gne en un
quarré.

SI on vouloit changer une figure rectiligne quelconque en un quarré, il ne faudroit, pour ramener ce problème à l'Article XXV. que faire de cette figure un rectangle ; ce qui seroit fort facile, à cause que les figures rectilignes ne sont que des assemblages de triangles, que chaque triangle est la moitié d'un rectangle qui a même base & même hauteur, & que tous les rectangles provenus des triangles, ne feront plus qu'un seul rectangle, en leur donnant à tous une hauteur commune (II. Part. Art. VI.)

XXIX.

LES figures dont les contours renfermeront des arcs de cercle, pourront aussi être changées en quarrés, lorsqu'on aura mesuré par pratique la longueur des arcs dont elles seront composées; car on pourra alors changer ces figures, ainsi que les rectilignes, en rectangles; on aura recours pour cela aux Articles IX. & X. où l'on a appris à mesurer toutes sortes de figures circulaires.

XXX.

ON tire encore de la propriété du cercle, expliquée dans l'Article XXIV. une méthode bien facile pour faire un quarré qui soit à un quarré donné, en raison donnée, problème que nous avons promis dans l'Article XXII. de la seconde Partie.

Faire un quarré qui soit à un autre en raison donnée.

Supposons, par exemple, qu'on se propose de faire un quarré qui soit au

FIG. 6. quarré ABCD, comme la ligne M à la ligne N ; on divisera (I. Part. Art. XLI.) le côté CB au point E, de manière que CB soit à BE comme la ligne N à la ligne M ; menant ensuite la parallèle EF à AB, le rectangle ABEF, aura la même superficie que le quarré demandé ; donc il ne s'agira plus que de changer ce rectangle en un quarré.

XXXI.

**FIG. 7.
& 8.**

Faire un poligone qui soit en raison donnée avec un poligone semblable.

Si on veut faire un poligone HIK LM, qui soit à un poligone semblable ABCDE, dans la raison de la ligne X à la ligne Y, on commencera par faire sur le côté AB du poligone donné ABCDE, le quarré ABGF, ensuite on cherchera un autre quarré HIOQ, qui soit au quarré ABGF, comme la ligne X à la ligne Y. Et alors décrivant sur le côté HI de ce quarré un poligone HIKLM, semblable au premier ABCDE, ce nouveau poli-

gone fera celui qu'on demande. La raison en est bien facile à trouver, si on se rappelle (I. Part. Art. XLVIII.) que les figures semblables sont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues.

XXXII.

Si on vouloit faire un cercle dont l'aire fût à celle d'un cercle donné, comme X à Y, il faudroit construire un quarré, qui fût au quarré du rayon de ce premier cercle, comme X à Y, & le côté de ce nouveau quarré seroit le rayon du cercle demandé.

Faire un cercle, qui soit à un autre cercle en raison donnée.

XXXIII.

Voici encore une propriété du cercle tirée de celle qui a fourni les problèmes précédens.

Si d'un point A, pris hors d'un cercle, on mène à volonté deux droites ABC, ADE, qui coupent, chacune, la circonférence en deux points,

FIG. 9.

Si d'un point pris hors d'un cercle, on tire deux

lignes qui le
traversent ,
les rectan-
gles de ces
deux droites
par leurs par-
ties extérieu-
res seront
égaux.

& qu'on mène les droites CD , BE , les triangles ACD , AEB , seront semblables, puisque l'angle A est commun aux deux triangles, & qu'ils ont d'ailleurs les angles à la circonférence C & E , égaux. Or de ce que les triangles CAD , EAB , sont semblables, il s'enfuit que les quatre lignes AB , AD , AE , AC , sont en proportion, & par conséquent, que le rectangle des deux droites AB , AC , est égal au rectangle des deux droites AD , AE , ce qui peut s'exprimer ainsi. Si d'un point quelconque A , pris hors d'un cercle, on tire à volonté deux lignes droites AC , AE , qui traversent ce cercle, le rectangle de la droite AC par sa partie extérieure AB , fera égal au rectangle de la droite AE par sa partie extérieure AD .

XXXIV.

LORSQUE la droite qui part du point A , au lieu de couper le cercle, ne fait simplement que le toucher,

ainsi que AF, la propriété précédente se change en celle-ci : le quarré d'une tangente AF, est égal au rectangle produit par la secante quelconque AE, & par sa partie extérieure AD. Ce qui est bien aisé à démontrer. Car regardant la droite AF qui touche le cercle, comme une ligne qui le couperoit en deux points infiniment proches, les lignes AB, AC, ne sont alors qu'une même ligne AF, & au lieu du rectangle de AB, par AC, on a le quarré de AF.

Le quarré de la tangente est égal au rectangle de la secante par sa partie extérieure.

XXXV.

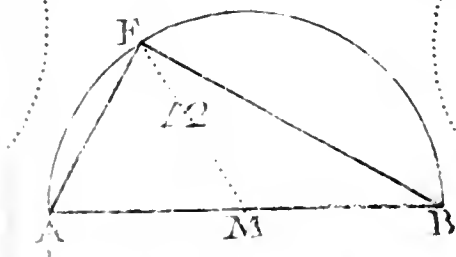
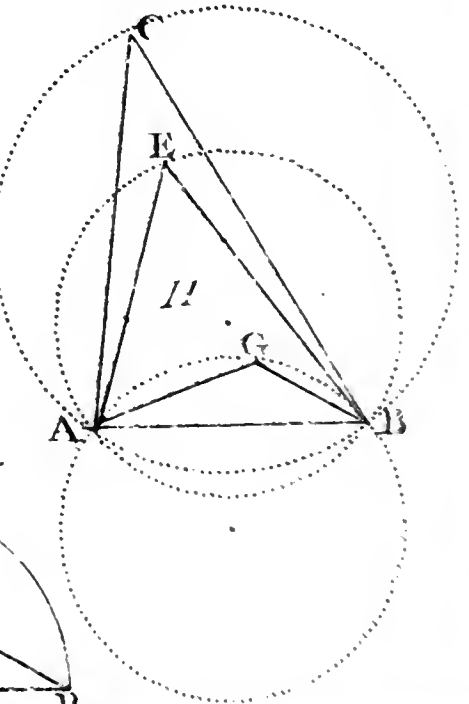
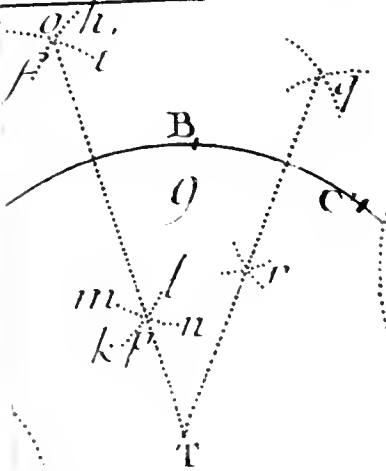
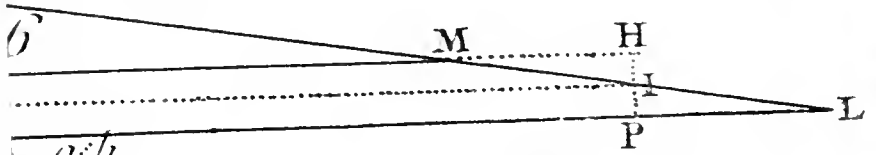
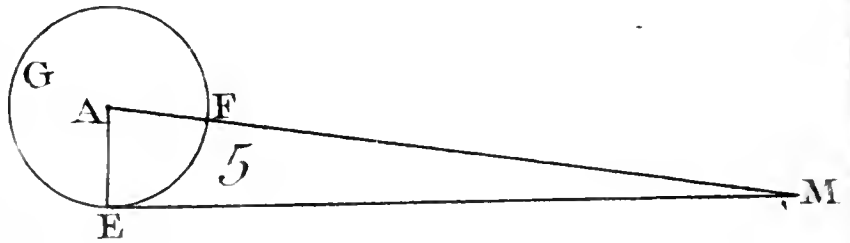
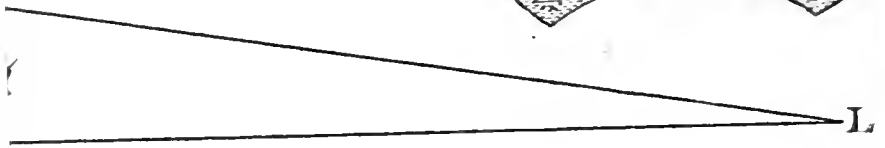
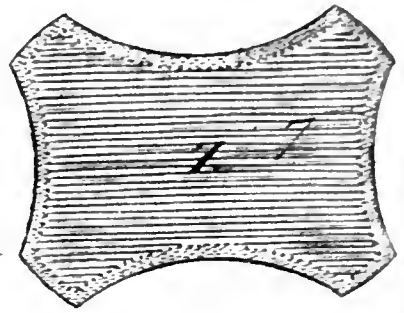
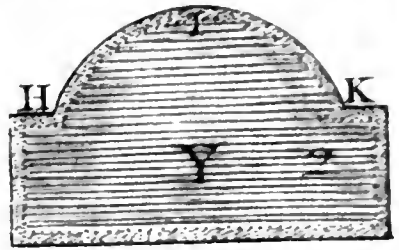
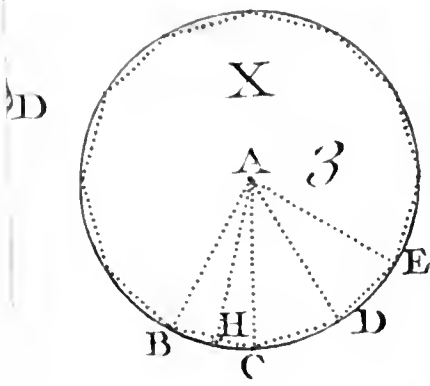
LA proposition démontrée dans l'Article précédent, en nous apprenant la valeur du quarré de la tangente AF, ne nous apprend pas à tirer cette tangente du point donné A. Pour la tirer, on se ressouviendra, (Art. XIX.) que le rayon FG est perpendiculaire à la tangente FA. Ainsi il ne s'agit que de trouver, sur le cercle donné, le point F, tel que l'angle AFG

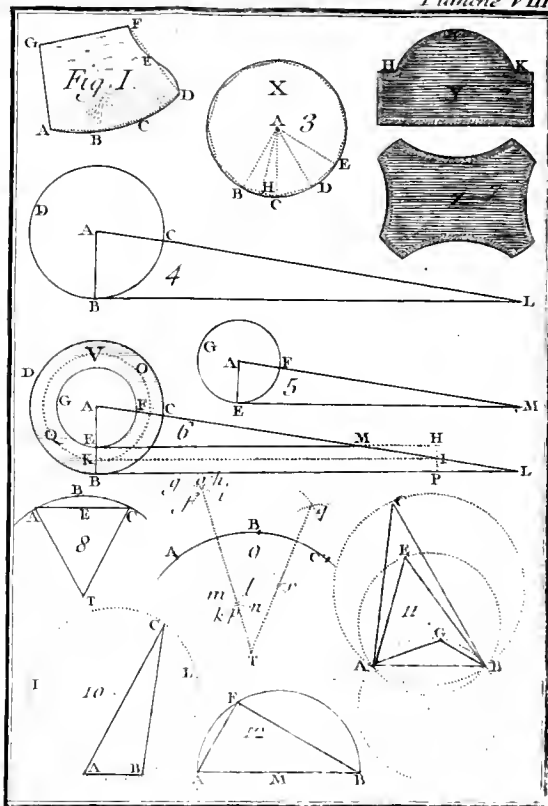
FIG. 102

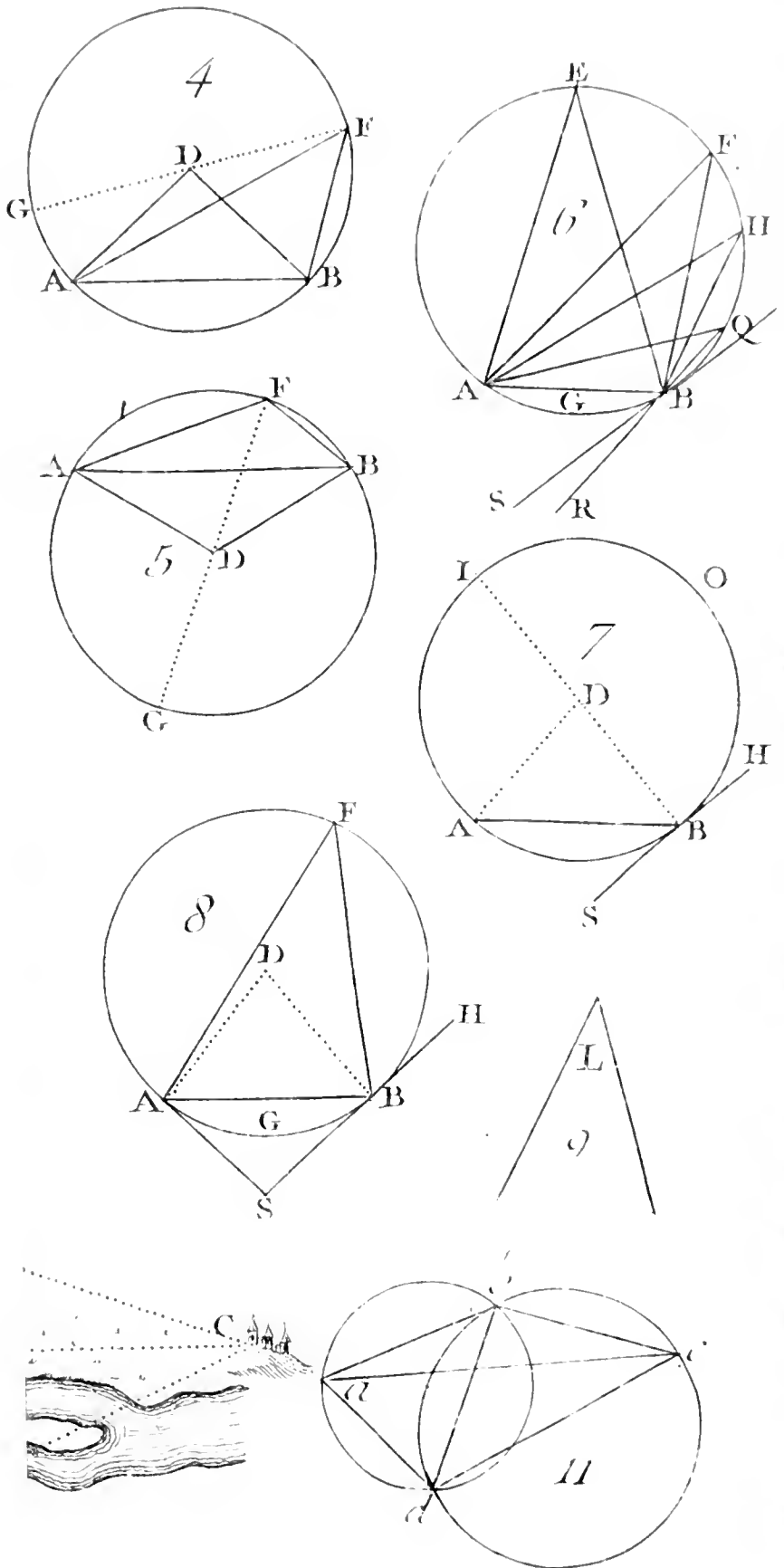
D'un point donné hors d'un cercle, lui mener une tangente.

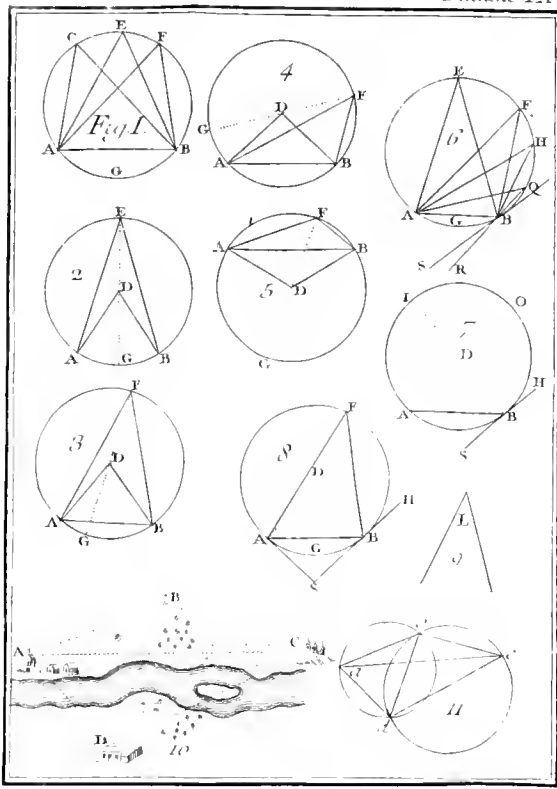
soit droit. Donc, en décrivant sur AG un demi cercle, le point où il coupera le cercle FKO fera (Article XIII.) le point cherché F.

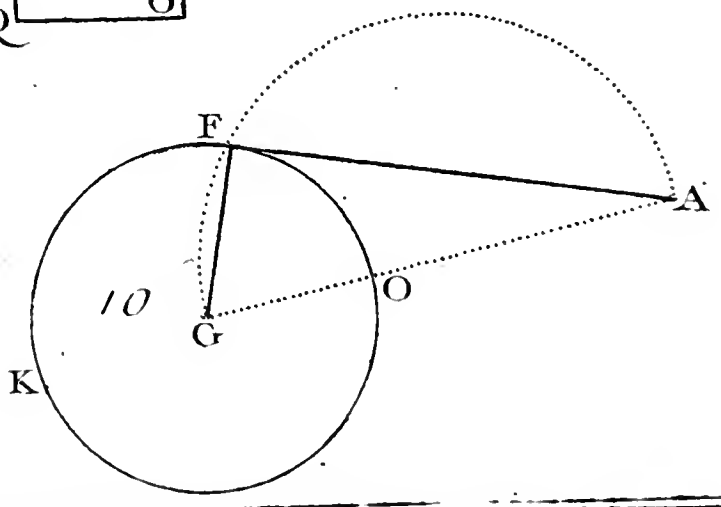
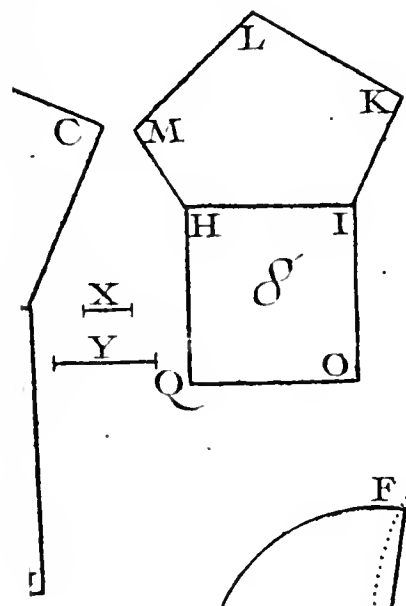
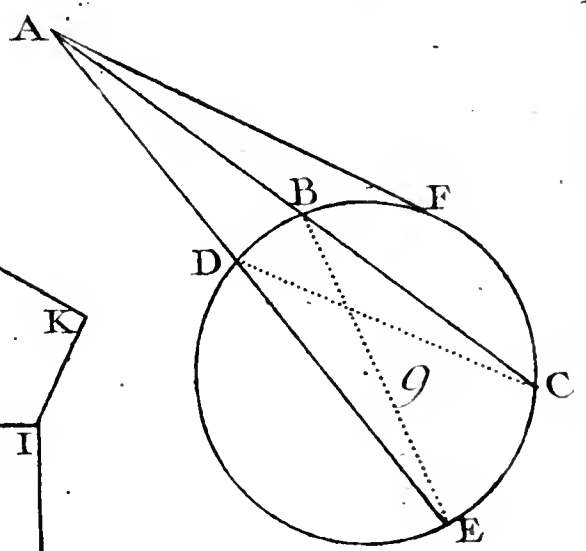
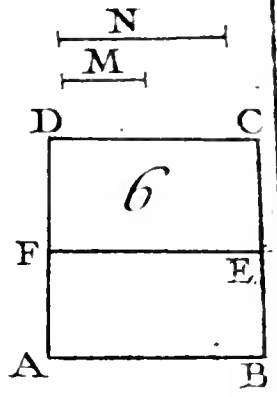
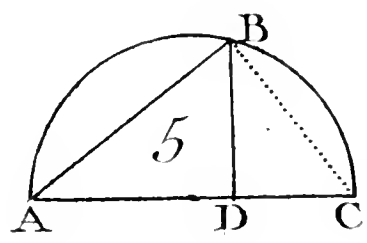
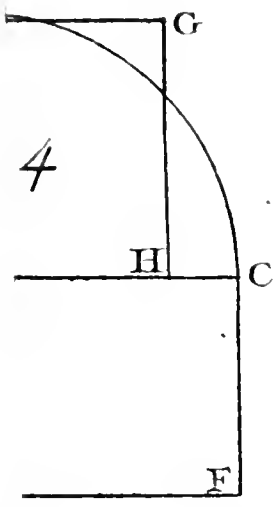
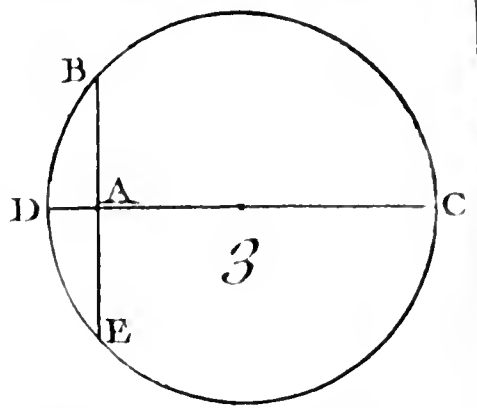
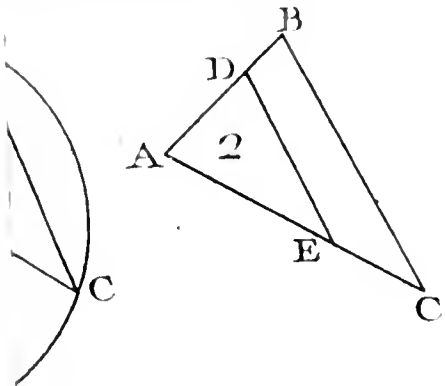


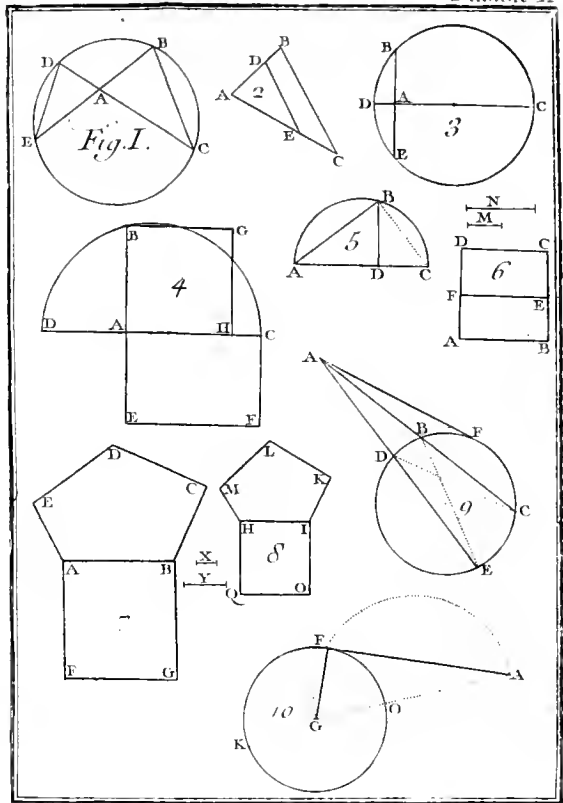


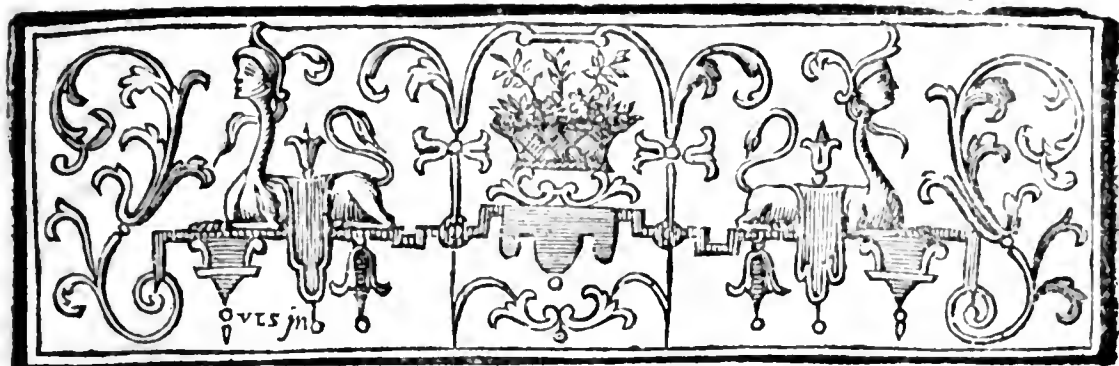












E L E M E N S

D E

G E O M E T R I E .

QUATRIEME PARTIE.

*De la manière de mesurer les solides,
& leurs surfaces.*

LEs Principes que nous avons établis dans les trois premières Parties de cet Ouvrage, pourroient nous suffire pour résoudre des problêmes beaucoup plus difficiles que ceux que nous allons nous proposer ; mais il est plus dans l'ordre

K

que nous avons suivi précédemment, de passer maintenant à la mesure des solides ; c'est-à-dire, des étendues terminées, qui ont à la fois trois dimensions, longueur, largeur, & profondeur.

Cette recherche a été, sans doute, un des premiers objets qui ait pû fixer l'attention des Géomètres. On aura voulu sçavoir, par exemple, combien il y avoit de pierres de taille

PL. XI. dans un mur dont la hauteur AD, la
FIG. 1. largeur AB, & la profondeur ou épaisseur BG étoient connues. On se fera

proposé de déterminer la quantité d'eau que contenoit un fossé, ou un réservoir
FIG. 2. ABCD ; on aura voulu trouver la solidité d'une Tour, d'une obélisque, d'une maison, d'un clocher, &c.

Pour traiter les figures qui ont les trois dimensions, de la même manière que nous avons traité de celles qui n'en ont que deux, nous commencerons par examiner les solides qui sont terminés par des plans.

Nous n'aurons pas besoin de parler de la manière de mesurer les surfaces de ces corps, elles ne peuvent être que des assemblages de figures rectilignes; & par conséquent, leur mesure dépend de ce qui a été dit dans la première Partie.

I.

POUR mesurer la solidité des corps, il est naturel de les rapporter tous au solide le plus simple, ainsi que pour mesurer les surfaces, on les a toutes rapportées au carré. Or le solide le plus simple, c'est le cube, qui est en effet, en solide, ce que le carré est en superficie; c'est-à-dire que c'est un espace tel que *abcdefgh*, dont la longueur, la largeur & la profondeur sont égales, ou, ce qui revient au même, c'est une figure terminée par six faces égales qui sont des carrés.

Le cube est une figure solide terminée par six carrés. C'est la mesure commune des solides.

FIG. 3.

On appelle côté du cube le côté des carrés qui lui servent de faces.

Par un pied cube , on entend un cube , dont le côté est d'un pied ; de même un pouce cube , est un cube dont le côté est d'un pouce , &c.

II.

L E S solides qu'on a le plus communément à mesurer , sont des figures **ABCDEFGH** terminées par six faces rectangles **ABCD** , **CBGF** , **CFED** , **DEHA** , **GFEH** , **ABGH**. On appelle ces solides des Parallelipipédés , parce que leurs faces opposées conservant dans tous leurs points la même distance l'une de l'autre , sont dites parallèles , de même que les lignes ont aussi été nommées parallèles , lorsqu'elles conservoient par tout la même distance.

FIG. 1.

Le parallelipipède , est un solide terminé par six rectangles.

Les plans parallèles , sont ceux qui conservent toujours entre eux la même distance.

III.

O R si on se propose de mesurer des solides de cette espèce , l'analogie de ce problème avec celui où il s'est agi de la mesure des surfaces rectangles ,

donnera un moyen facile de le résoudre.

On commencera par mesurer séparément la longueur AD, la largeur AB & la profondeur BG de la figure proposée, soit en pieds, soit en pouces, &c. on multipliera ensuite l'un par l'autre les trois nombres qu'on aura trouvés, & le produit qui viendra de cette multiplication exprimera combien le parallépipède contiendra de pieds cubes, ou de pouces cubes, &c. suivant que les dimensions auront été mesurées en pieds, ou en pouces, &c. Pour mieux montrer comment se fait cette opération, nous allons en donner un exemple.

Mesure du
parallépipè-
pede.

Supposons que la longueur AD soit de 6 pieds, la largeur AB de 5, & la profondeur BG de 4, le rectangle ABCD (I. Part. Art. XI.) aura 6 fois 5 ou 30 pieds quarrés. Si on imagine ensuite que les lignes BG, CF, DE, AH, qui mesurent toutes également la

profondeur du solide , soient partagées chacune en quatre parties égales , & que par les points de division correspondans , on fasse passer autant de plans parallèles les uns aux autres , ces plans diviseront le parallépipède proposé , en quatre autres parallépipèdes , qui auront chacun un pied de profondeur , & qui seront tous égaux & semblables. Or l'inspection seule de la figure fait voir que le premier de ces parallépipèdes contient 30 pieds cubes , puisque sa face extérieure ABCD contient 30 pieds quarrés. Donc le solide total ABCDEFGH contiendra 4 fois 30 ou 120 pieds cubes.

I V.

Nous ne nous arrêterons point à expliquer les différens moyens qu'on peut employer dans la pratique pour construire des parallépipèdes , parce que ces moyens sont , pour la plûpart , si aisés à trouver , qu'il n'y a personne

qui ne les puisse imaginer. Mais nous donnerons la formation suivante du parallélépipède, qui est plus utile à considérer que toutes les autres.

On conçoit qu'un quarré ou un rectangle $ABGH$ se meuve parallèlement à lui-même, enforte que ses quatre angles A, B, G, H , parcourent chacun une des quatre lignes AD, BC, GF, HE , perpendiculaires au plan du rectangle $ABGH$.

Les parallélépipèdes sont produits par un rectangle qui se meut parallèlement à lui-même.

V.

IL est presque inutile d'avertir que par une ligne perpendiculaire à un plan, nous entendons une ligne qui ne panche d'aucun côté sur ce plan, & de même qu'un plan qui ne panche pas plus d'un côté que d'un autre sur un second plan, est dit perpendiculaire à ce second plan; ces deux définitions sont analogues à celle que nous avons donnée d'une ligne perpendiculaire à une autre ligne.

La ligne perpendiculaire à un plan, est celle qui ne panche d'aucun côté sur ce plan.

Il en est de même du plan perpendiculaire à un autre plan.

VI.

FIG. 4. O R il suit de-là que la ligne AB, qui est perpendiculaire au plan X doit être perpendiculaire à toutes les lignes AC, AD, AE, &c. qui partent du pied A de cette ligne, & qui sont dans ce plan. Car il est évident que si elle panchoit sur une de ces lignes, elle feroit inclinée vers quelque côté du plan. Donc elle ne lui feroit pas perpendiculaire.

La ligne qui est perpendiculaire à un plan, est perpendiculaire à toutes les lignes de ce plan, qui partent du point où elle tombe.

VII.

P O U R se représenter d'une façon bien sensible, comment la ligne AB peut être perpendiculaire à toutes les lignes qui partent de son extrémité A, on n'aura qu'à faire une figure en relief de la manière suivante.

On construira de quelque matiere unie & facile à plier comme du carton, un rectangle FGDE, partagé en deux parties égales par la droite AB,

FIG. 5.

perpendiculaire aux côtés ED, FG; on pliera ensuite ce rectangle, en sorte que le pli soit le long de la ligne AB, & on le portera tout plié sur le plan X. Il est évident que quelle que soit l'ouverture qu'on donne aux deux parties FBAE, GBAD du rectangle plié EAD GBF, ces deux parties resteront toujours appliquées sur le plan X, sans que la ligne AB change de position par rapport à ce plan, cette droite AB sera donc perpendiculaire à toutes les lignes qui partent de son pied, & qui seront dans le plan X, puisque les côtés AE, AD du rectangle plié s'appliqueront successivement sur chacune de ces lignes par le mouvement que nous venons de décrire.

FIG. 6.

VIII.

ON tire de la construction précédente une pratique bien commode, pour élever d'un point donné sur un plan, une ligne perpendiculaire à ce

plan , ou pour abbaiffer d'un point pris hors d'un plan , une ligne qui soit perpendiculaire à ce plan. Car que le point proposé soit dans le plan , en A par exemple , ou qu'il soit hors du plan , comme en H, on pourra toujours faire avancer le rectangle EFBGDA sur le plan X , jusqu'à ce que le pli AB touche le point donné , & AB deviendra , dans les deux cas , la perpendiculaire demandée.

FIG. 7.

Pratique simple pour élever , ou pour abbaiffer des lignes perpendiculaires à des plans.

I X.

I L suit aussi de-là qu'une ligne AB sera perpendiculaire à un plan X , toutes les fois qu'elle sera perpendiculaire à deux lignes AE & AD de ce plan. Car alors AB pourra être regardée comme le pli d'un rectangle dont l'un des côtés pliés s'appliqueroit sur AE , & l'autre sur AD. Or ce pli ne pourroit manquer d'être perpendiculaire au plan X.

X.

S I on veut élever sur une ligne

Une ligne sera perpendiculaire à un plan , si elle est perpendiculaire à deux lignes de ce plan , qui partent du point où elle tombe.

quelconque KL , un plan perpendiculaire au plan X dans lequel est cette ligne, on pourra se servir encore, pour cela, du rectangle plié $GBFEAD$. Car il ne faudra que poser sur la ligne KL le côté AD d'une des parties $ADGB$ de ce rectangle plié, & le plan de cette partie $ADGB$, fera celui qu'on demande.

Manière d'élever un plan perpendiculaire à un autre.

XI.

ON verra facilement que si on posoit un troisième plan Y sur les deux côtés FB & BG du même rectangle plié, ce plan Y seroit encore perpendiculaire à la ligne AB , & par conséquent, parallèle au plan X .

FIG. 8.

Donc si à un plan X on élève trois perpendiculaires EF , AB , DG , d'égale longueur, le plan Y , qui passera par les trois points F , B , G , fera parallèle au plan X .

Mener un plan parallèle à un autre.

XII.

LORSQUE deux plans ne seront

pas parallèles, il sera facile de connoître l'angle qu'ils feront entr'eux, en se servant encore de notre rectangle plié.

FIG. 9. Pour en venir à bout, nous appliquerons l'une des deux parties $ABGD$ de ce rectangle, sur le plan X ; il est évident que l'angle EAD , ou son égal FBG , mesurera l'inclinaison du plan $EABF$ sur le plan $DABG$. Or si on remarque que AB est la commune section de ces plans, & que EA & AD sont chacune perpendiculaires à AB , on en tirera sans peine la règle suivante.

Mesurer l'inclinaison d'un plan sur un autre.

Deux plans qui ne sont pas parallèles étant donnés, il faut commencer par trouver la ligne droite, qui est leur commune section; ensuite d'un point quelconque de cette ligne, on lui mènera deux perpendiculaires, qui soient chacune dans un de ces plans, & l'angle que feront entr'elles ces deux perpendiculaires, mesurera l'angle que les deux plans donnés font entr'eux.

XIII.

COMME on s'apperçoit, sans peine, que pendant le mouvement de ABFE, autour du pli AB, la droite AE, dont l'extrêmité E décrit un arc de cercle ED, ne sort jamais d'un plan EAHD, perpendiculaire au plan X, & que l'inclinaison de la droite EA sur le plan X n'est autre chose que l'angle EAD, on découvre encore très-facilement que l'inclinaison d'une droite quelconque EA sur le plan X, est mesurée par l'angle EAH fait entre cette ligne & la ligne AD, qui passe par A & par le point H du plan X, où tombe la perpendiculaire EH, abaissée sur ce plan, d'un point quelconque E de la droite AE.

Mesurer l'inclinaison d'une ligne sur un plan.

XIV.

L'INSPECTION seule de la figure dont on vient de se servir dans l'Article précédent, fournit un nouveau

moyen d'abaisser d'un point E , hors d'un plan X , une ligne EH , perpendiculaire à ce plan.

Nouvelle
manière d'ab-
baïsser une li-
gne perpendi-
culaire à un
plan donné.

Ayant tiré une ligne quelconque BAS , dans le plan X , on abaissera du point donné E la perpendiculaire EA à cette ligne. Cela fait, du point A , où cette perpendiculaire tombe, on élèvera dans le plan X la perpendiculaire AD à AB ; & abbaissant ensuite du point donné E , à la droite AD , la perpendiculaire EH , cette ligne fera la perpendiculaire au plan X .

X V.

Seconde ma-
nière d'éle-
ver une ligne
perpendicu-
laire à un
plan donné.

ON tire de-là une seconde façon d'élever à un plan X , une perpendiculaire MN , d'un point M donné sur ce plan.

Ayant abbaissé d'un point quelconque E pris hors du plan X , la perpendiculaire EH à ce plan, on mènera par le point donné M la droite MN

qui soit parallèle à HE, & elle sera la perpendiculaire au plan X.

XVI.

APRÈS le parallépipède, le solide le plus simple est le prisme droit. C'est une figure ABCDEFGHIKLM dont les deux bases opposées & parallèles sont deux polygones égaux & tellement placés que les côtés GF, FE, &c. de l'un soient parallèles aux côtés BC, CD, &c. de l'autre, & dont les autres faces sont des rectangles ABGH, BGFC, &c.]

FIG. 10.

Le prisme droit est une figure solide, dont les deux bases opposées sont deux polygones égaux, & les autres faces des rectangles.

XVII.

LES Géomètres supposent ces figures, formées ainsi que les parallépipèdes, par une base ABCDLM, qui se meut parallèlement à elle-même, de façon que ses angles A, B, &c. suivent des lignes perpendiculaires au plan de la base.

Formation des prismes droits.

XVIII.

P O U R distinguer les différentes espèces de prismes droits , on ajoute le nom du poligone qui leur sert de base. Le prisme exagonal , par exemple , est celui dont la base est un exagone.

XIX.

Deux prismes qui ont des bases égales , sont en même raison que leurs hauteurs.

P O U R trouver la manière de mesurer toutes sortes de prismes droits , on observera d'abord que de deux prismes droits , dont les bases seroient égales , celui qui auroit une plus grande hauteur seroit plus grand en solidité dans la même raison que sa hauteur seroit plus grande.

XX.

Deux prismes , qui ont la même hauteur , sont en même raison que leurs bases.

O N remarquera ensuite que deux prismes droits , qui auroient la même hauteur , mais dont l'un auroit une base qui contiendroit un certain nombre de fois la base de l'autre , seroient entr'eux
dans

dans la même raison que leurs bases. La vérité de cette proposition s'apperçoit facilement en faisant attention à la formation des prismes expliquée dans l'Article XVII.

Que *abcdefghijklm*, & *ABCDEFGH IKLM* soient les deux prismes qui ont la même hauteur, & que la base *abcdlm* du plus petit, soit, par exemple, le quart de la base *ABCDLM*. Puisque les deux prismes sont produits par les mouvemens de ces deux bases, il s'en suit qu'un plan quelconque, qui sera parallèle au plan où sont les deux bases, coupera dans les deux prismes, deux poligones, dont chacun sera égal à la base du prisme où il sera coupé. C'est-à-dire, que la section du grand prisme sera toujours quadruple de celle du petit. Donc le prisme *ABCDEFGH IKLM* pourra être regardé comme composé de tranches toutes quadruples de celle du prisme *abcdefghijklm*, & par conséquent, la solidité du premier

FIG. 10.
& 11.

prisme fera quadruple de celle du second.

X X I.

A P R E' s ces deux remarques, il ne fera pas difficile de former la règle suivante pour mesurer tous les prismes droits.

La mesure du prisme droit est le produit de sa base par sa hauteur.

On mesurera d'abord en pieds carrés, ou en pouces carrés, &c. l'aire de la base du prisme proposé, ensuite on multipliera le nombre qu'on aura trouvé, par le nombre des pieds, ou des pouces, &c. que contiendra la hauteur du prisme, & le produit donnera le nombre de pieds cubes, ou de pouces cubes, &c. contenus dans le prisme proposé, & sera, par conséquent, sa mesure.

X X I I.

Les prismes obliques diffèrent des prismes droits en ce que les faces qui sont des rectan-

LE nom de prisme se donne encore aux solides (Fig. 13.) qui ont deux bases poligones égales, ainsi que les précédens, mais dont les autres faces

font des parallélogrammes , au lieu d'être des rectangles. Pour distinguer ces nouveaux prismes de ceux dont nous venons de parler , on les appelle des prismes obliques , par opposition aux autres qu'on avoit nommés des prismes droits.

gles dans ceux-ci , font des parallélogrammes dans ceux là.

XXIII.

ON conçoit les prismes obliques formés par une base *abcki*, qui se meut parallèlement à elle-même , & de telle façon que ses angles suivent des lignes parallèles *ag*, *bh*, *cd*, &c. qui s'élevont hors du plan de la base , & qui ne lui font point perpendiculaires.

Formation des prismes obliques.

FIG. 13.

XXIV.

L'ANALOGIE qu'il y a entre cette formation & la formation des prismes droits dont nous avons parlé (Article XVII.) donne facilement la mesure de la solidité des prismes obliques ; car si on imagine à côté d'un prisme

Lij

FIG. 12.
& 13.

oblique *abcdefghik* , un prisme droit *ABCDEFGHIK* , qui ait la même base , & que ces deux prismes soient renfermés entre deux plans parallèles , on verra que la solidité de ces deux corps sera absolument la même.

Car , si par un point quelconque *P* de la hauteur , on fait passer un plan parallèle à la base , les sections *NOPQR* , *nopqr* , que ce plan formera dans chacun des deux prismes , pourront être regardées comme les bases égales *ABCKI* , *abcki* , arrivées en *NOPQR* , *nopqr* , par le mouvement qui forme ces deux prismes ; & ainsi ces deux sections feront des polygones égaux.

Or si toutes les tranches imaginables qu'on peut former dans ces deux prismes par de mêmes plans coupans , sont égales , il faudra que les assemblages de ces tranches , c'est-à-dire , les prismes , soient égaux aussi.

Les prismes
obliques sont
égaux aux

On énonce ordinairement ainsi cette proposition : Les prismes obliques sont

égaux aux prismes droits, lorsqu'ils ont même base & même hauteur. On appelle la hauteur du prisme la perpendiculaire abaissée du plan supérieur sur l'inférieur, ou sur son prolongement.

prismes droits
lorsqu'ils ont
même base
& même
hauteur.

XXV.

ET comme les parallépipèdes doivent être mis au nombre des prismes, on étendra ce que nous venons de dire des prismes aux parallépipèdes obliques; c'est-à-dire, aux figures *abcdefgh**, produites en faisant mouvoir un quarré, un rectangle, ou même un parallélogramme, de manière que ses quatre angles suivent des lignes parallèles, qui s'élevont obliquement de la base. Ainsi, le parallépipède oblique *abcdefgh*, sera égal au parallépipède droit *ABCDEF* *FGH*, si la base *abgh* est la même, ou a la même superficie que la base *ABGH*, & si la perpendiculaire abaissée du plan *dcfe* sur le plan *abgh* est égale à la perpendiculaire abaissée du

Il en est de même des parallépipèdes obliques à l'égard des parallépipèdes droits. ;

* PL. XII.

FIG. 1. & 2.

plan DCFE sur le plan ABGH.

XXVI.

FIG. 3.

AYANT vû ce qui concerne les parallélipipédés & les prismes, examinons maintenant les pyramides; c'est-à-dire, les corps tels que ABCDEFG, renfermés par un certain nombre de triangles qui partent tous d'un même sommet A, & qui se terminent à une base poligone quelconque BCDEFG. Il est nécessaire de considérer ces sortes de solides, non-seulement parce qu'on en rencontre dans les bâtimens & dans les autres ouvrages à construire, mais parce que tous les solides terminés par des plans, sont des assemblages de pyramides, ainsi que les figures rectilignes sont des assemblages de triangles. Il ne faut, pour s'en assurer, que tirer d'un point pris où l'on voudra dans l'intérieur du corps proposé, des lignes à tous les angles de ce corps.

XXVII.

ON distingue les pyramides les unes des autres , ainsi que les prismes , par le nom de la figure qui leur sert de base.

XXVIII.

LORSQUE la pyramide a pour base une figure régulière , & que son sommet répond perpendiculairement au centre H de sa base , ainsi que dans la Fig. 3. la pyramide est alors appelée pyramide droite ; elle est nommée , au contraire , pyramide oblique , lorsque le sommet n'est pas perpendiculairement au-dessus du centre , ainsi que dans la Fig. 5.

XXIX.

POUR découvrir la manière de mesurer toutes sortes de pyramides , tant droites qu'obliques , nous commencerons par faire sur ces figures , quelques

réflexions générales, auxquelles on est conduit par la connoissance des propriétés des prismes.

Lorsqu'on fait attention à l'égalité des prismes qui ont même base & même hauteur, il est naturel qu'on se rappelle que les parallélogrammes sont aussi égaux entr'eux, lorsqu'ils ont ces mêmes conditions, & qu'il en est encore de même des triangles. Ces trois vérités se présentant à la fois à l'esprit, l'analogie doit porter à croire que les propriétés qui sont communes aux parallélogrammes & aux triangles, peuvent l'être aussi aux prismes & aux pyramides; on doit donc soupçonner que les pyramides qui ont même base & même hauteur, ont la même solidité.

X X X.

Les réflexions suivantes confirmeront ce soupçon.

FIG. 4. & 5. Soient $ABCDE$, $abcde$, deux pyramides, dont les hauteurs AH , ah ,

soient les mêmes, & dont les bases soient deux figures égales, par exemple, deux quarrés égaux $BCDE$, $bcde$; si on conçoit que ces deux pyramides soient coupées par une infinité de plans parallèles à leurs bases, on imaginera, sans peine, que ces coupes de pyramide donneront des quarrés égaux $IKLM$, $iklm$, & par conséquent, que les deux pyramides peuvent être regardées comme des assemblages d'un même nombre de tranches, qui dans ces deux pyramides feront égales chacune à sa correspondante. Donc, conclura-t-on, la somme des tranches est la même, de part & d'autre : c'est-à-dire, que les deux pyramides ont la même solidité.

Si les bases des deux pyramides étoient d'autres poligones réguliers ou irréguliers $BCDEF$, $bcdef$, égaux en-
 tr'eux, il n'y a personne qui ne pen-
 sât encore, que toutes les tranches
 $IKLMN$, $iklmn$, de l'une & de l'au-
 tre de ces deux pyramides devroient

FIG. 6. & 7.

être égales entr'elles ; & qui n'en conclut , par conféquent , que les pyramides feroient toujourns les mêmes , lorsquelles auroient même bafe & même hauteur.

X X X I.

TOUT cela eft aisé à imaginer après la démonstration que nous avons donnée , de l'égalité des prismes qui ont même hauteur ; cependant la similitude entre la tranche quelconque IKLMN d'une pyramide & la bafe BCDEF , & l'égalité des tranches IKLMN & *iklmn* , font de ces propositions , qui , quoique fenfibles pour tout le monde , ont , à la rigueur , befoin d'une démonstration ; or pour trouver cette démonstration , on eft obligé d'entrer dans plusieurs confidérations fur la similitude des figures folides.

X X X I I.

REPRENONS la pyramide ABCDEF , & fupposons-la coupée par un

plan IKLMN, parallèle à la base, nous allons démontrer que la section, ou la coupe formée par ce plan dans la pyramide, est un poligone parfaitement semblable au poligone BCDEF ; & que la pyramide AIKLMN est elle-même entièrement semblable à la pyramide ABCDEF, c'est-à-dire, que les angles que forment toutes les lignes de ces deux figures sont respectivement égaux, & que tous les côtés de la petite pyramide auront le même rapport entr'eux que ceux de la grande.

En quoi consiste la similitude de deux pyramides.

XXXIII.

COMMENÇONS par observer que si deux plans X & Y sont parallèles, & que deux lignes quelconques ALD, AME, partant d'un même point A, traversent ces deux plans, les droites LM, DE, qui joindront les points L, M ; D, E, seront parallèles. La raison en est, que si ces deux lignes n'étoient pas parallèles, elles se

FIG. 8.

rencontreroient quelque part , étant prolongées ; mais si elles se rencontreroient , les plans dans lesquels elles sont, & dont elles ne peuvent pas sortir, en les prolongeant autant qu'il seroit nécessaire, se rencontreroient donc aussi. Donc ils ne seroient pas parallèles , ainsi qu'on le suppose.

XXXIV.

Si on suppose donc que le plan **IKLMN** soit parallèle au plan **BCDEF**, il s'en suivra que toutes les lignes **ML**, **LK**, **KI**, **IN**, **NM**, seront parallèles aux lignes **ED**, **DC**, **CB**, **BF**, **FE**, & par conséquent, que les triangles **ALM**, **AKL**, **AIK**, &c. seront semblables aux triangles **ADE**, **ACD**, **ABC**, &c. Si on prend l'un des côtés de ces triangles, **AM** par exemple , pour commune mesure , ou pour échelle de tous les côtés de la petite pyramide , pendant que le côté correspondant **AE** servira d'échelle aux côtés de la grande,

on verra, fans peine, que les côtés ML , LK , KI , &c. du poligone $IKLMN$ seront proportionnels aux côtés ED' , DC , CB , &c. du poligone $BCDEFG$.

On verra aussi facilement que tous les angles IKL , KLM , &c. seront respectivement égaux aux angles BCD , CDE , puisque les premiers seront formés par des lignes parallèles aux côtés des seconds. Donc les deux poligones $IKLMN$, $BCDEF$, seront semblables.

XXXV.

OR les côtés AM , AL , AK , &c. étant proportionnels aux côtés AE , AD , AC , &c. & les angles ALM , ALK , &c. respectivement égaux aux angles ADE , ADC , &c. à cause de la ressemblance des triangles ALM , ADE ; ALK , ADC , &c. les deux pyramides $AIKLMN$, $ABCDEF$, seront entièrement semblables.

XXXVI.

ENFIN, si on mène du point A, AH, perpendiculaire au plan sur lequel est construit le poligone BCDEF, & que Q soit le point où cette perpendiculaire rencontre le plan du poligone IKLMN, il est clair que les droites AQ, AH, hauteurs des deux pyramides AIKLMN, ABCDEF, feront entr'elles dans la même raison que les côtés homologues AM, AE; AL, AD, &c. ou, ce qui revient au même, que si on prend les hauteurs AQ, AH, pour les échelles des deux pyramides, les côtés AM, AL, &c. contiendront autant des parties de AQ, que les côtés AE, AD, &c. contiendront des parties de AH.

XXXVII.

QU'ON revienne maintenant à considérer les deux pyramides ABCDEF, *abcdef*, à la fois, on verra que les deux

tranches IKLMN, *iklmn*, étant semblables aux bases BCDEF, *bcdef*, qui sont les mêmes, elles feront semblables entr'elles. On verra, de plus, que ces deux tranches feront égales entr'elles, puisque les échelles de ces deux figures sont les droites égales AQ, *aq*, hauteurs des pyramides AIKLMN, *aiklmn*.

Donc, sans connoître quelle est la solidité des pyramides, on sçait déjà, avec certitude, que si elles ont même hauteur & même base, elles sont égales, ainsi que nous l'avions soupçonné (Article XXIX.)

Les pyramides qui ont même base & même hauteur, sont égales.

XXXVIII.

Si les bases des deux pyramides, au lieu d'être les mêmes, étoient seulement égales en superficie, les pyramides seroient encore égales en solidité; car soit *abcdef**, & *arst*, deux pyramides qui ont la même hauteur *ah*, si on coupe ces deux pyramides par

Deux pyramides sont encore égales, si ayant la même hauteur, leurs bases, sans être des polygones semblables, sont égales en superficie.

*FIG. 7. & 9.

un plan quelconque parallèle à la base, il est évident qu'il y aura même rapport de l'aire $iklmn$ à l'aire $bcdef$, que de l'aire uxy à l'aire rft ; puisque $iklmn$, $bcdef$, étant (Article XXXIV.) des figures semblables, elles ne diffèrent (I. Part. Art. XLVIII.) que par leurs échelles aq , ah , &c. & que les figures uxy , rft , étant aussi semblables, elles ne diffèrent, non plus, que par leurs échelles, qui sont encore les lignes aq , ah .

Mais si les bases rft , $bcdef$, sont égales en superficie, leurs parties proportionnelles uxy , $iklmn$, seront donc égales. Donc toutes les tranches des deux pyramides $arft$, $abcdef$, auront la même étendue. Donc leurs assemblages; c'est-à-dire, les pyramides mêmes, seront égales en solidité.

XXXIX.

Les pyramides qui ont même hau-

SI la base $bcdef$ de la première pyramide contenoit un certain nombre de fois

fois la base rft ; la solidité de la première pyramide $abcdef$, contiendrait le même nombre de fois la solidité de la seconde $arft$.

teur , sont
entr'elles
comme leurs
bases.

Car , en ce cas , la base $bcdef$ étant divisée en plusieurs parties , dont chacune fût égale à la base rft , on pourroit concevoir la pyramide $abcdef$, comme composée de plusieurs autres pyramides , qui auroient pour bases les parties de $bcdef$. Or chacune de ces nouvelles pyramides seroit égale à la seconde pyramide $arft$, selon que nous l'avons prouvé dans l'Article précédent. Donc , &c.

Que si la base rft n'étoit pas contenüe exactement dans la base $bcdef$, mais que ces deux bases eussent une mesure commune X , on diviseroit chacune des deux bases $bcdef$, rft , en des parties égales à X , & on verroit que les deux pyramides $abcdef$, $arft$, seroient composées d'autant de pyramides nouvelles , toutes égales entr'elles ,

que les deux bases contiendroient de parties X. Donc les pyramides *abcdef*, *arst*, feroient entr'elles comme leurs bases.

Et si les bases étoient incommensurables, on feroit toujours voir, malgré cela, que les pyramides feroient entr'elles en même raison que leurs bases, en se servant d'une induction semblable à celle qu'on a employée dans un pareil cas (II. Part. Art. XXVIII.) lorsqu'il s'agissoit de comparer les figures dont les côtés étoient incommensurables; c'est-à-dire, qu'on diminueroit à l'infini la mesure X, de façon qu'elle pût être censée mesure commune, tant de la base *rst*, que de la base *bcdef*.

XL.

A Y A N T découvert que les pyramides qui ont même hauteur sont en même raison que leurs bases, on doit sentir que la mesure de leur solidité

ne renferme plus que très-peu de difficulté.

Car il ne s'agit plus que de sçavoir mesurer une seule pyramide, pour mesurer toutes les autres. Supposons, par exemple, que nous sçachions mesurer la pyramide $ABCDE$, & qu'on nous demande la mesure de la pyramide $ASTVXY$, qui n'a ni la même base, ni la même hauteur que la première: nous commencerons par faire une pyramide semblable à la pyramide $ABCDE$, & qui ait la hauteur de la pyramide $ASTVXY$, ce qui sera bien aisé; car il suffira (Article XXXV.) de prolonger les côtés AB , AC , AD , AE , & de les couper par le plan $LMNO$, dont la distance AG au sommet A , soit égale à la hauteur AQ .

FIG. 10.
& 11.

Cela fait, puisque par la supposition nous sçavons mesurer la pyramide $ABCDE$, il est évident que nous sçaurons mesurer aussi la pyramide $ALMNO$, qui lui est semblable; car quelles que

soient les opérations par lesquelles on mesure la pyramide *ABCDE*, on pourra toujours faire les mêmes opérations pour mesurer la pyramide semblable *ALMNO*, à cela près qu'on emploiera dans celle-ci une échelle différente.

Supposons donc que la pyramide *ALMNO* soit mesurée, sa mesure déterminera aussi celle de la pyramide proposée *ASTVXY*, car par l'Article précédent, ces deux pyramides sont entr'elles comme leurs bases *LMNO*, *STVXY*, & nous avons d'ailleurs enseigné dans la seconde Partie à trouver le rapport de ces deux bases.

X L I.

P U I S Q U' I L ne s'agit donc que de mesurer une seule pyramide, pour sçavoir mesurer toutes les autres pyramides imaginables, proposons-nous-en une extrêmement simple, qu'on peut

FIG. 12. former en tirant des quatre angles *A*, *B*, *C*, *H*, d'une des faces d'un cube

ABCDEF \overline{GH} , quatre lignes au point O , centre de ce cube; c'est-à-dire, le point également distant de $A, D, B, E,$ &c.

On voit, sans peine, que cette pyramide est la sixième partie du cube, puisqu'on peut décomposer le cube en six pyramides pareilles, en prenant chaque face pour base. Or la valeur du cube est le produit de la hauteur AF par la base $ABCH$. Donc, pour avoir la valeur de la pyramide, il faudra partager le produit de AF par $ABCH$, en six parties égales, ou, ce qui revient au même, il faudra multiplier la sixième partie de la hauteur AF par la base $ABCH$, & comme la sixième partie de la hauteur AF est le tiers de la hauteur OL de la pyramide $OABCH$, puisque sa hauteur OL est la moitié du côté du cube, il s'en suit que la mesure de la pyramide $OABCH$ est le produit du tiers de sa hauteur par sa base.

X L I I.

FIG. 13.

SUPPOSONS présentement qu'on ait à mesurer une pyramide quelconque OKMNSTV, on imaginera un cube dont le côté AB ou AF soit double de la hauteur OL de la pyramide proposée, & on concevra dans ce cube, une pyramide OABCH, dont la pointe soit au centre, & qui ait pour base une des faces ABCH du cube. Cette nouvelle pyramide aura même hauteur que la première; & par conséquent, (Article XXXIX.) la solidité de OABCH fera à celle de OKMNSTV, comme la base ABCH à la base KMNSTV; or par l'Article précédent, le produit du tiers de la hauteur commune OL par la base ABCH, est la valeur de la pyramide OABCH; donc le produit du tiers de la même hauteur commune OL par la base KMNSTV, fera la valeur de la pyramide proposée OKMNSTV.

La solidité
d'une pyra-
mide quel-

Et par-là, on découvre ce théorème

général, qu'une pyramide a pour mesure le produit de sa base par le tiers de sa hauteur.

conque, est le produit de sa base par le tiers de sa hauteur.

XLIII.

COMME nous avons vû (Article XXI.) que la solidité d'un prisme, est le produit de la base par la hauteur, il est clair, par l'Article précédent, que les pyramides feront toujours le tiers des prismes qui auront même base & même hauteur.

La pyramide est le tiers du prisme qui a même base & même hauteur.

XLIV.

APRÈS avoir mesuré tous les solides terminés par des plans, nous allons chercher le chemin qu'on peut avoir suivi pour mesurer les solides dont les surfaces sont courbes. Et comme nous n'avons traité dans la troisième Partie que des figures, dont les contours ne renferment d'autres courbes que le cercle, nous n'examinerons que les corps dont les courbures sont circulaires.

Miiij

Dans l'examen de ces corps, nous aurons deux objets, la mesure de leurs surfaces & celle de leurs solidités; car ces surfaces étant, ou entièrement courbes, ou en partie planes & en partie courbes, nous ne pourrions renvoyer leur mesure à la première Partie, ainsi que nous l'avons fait des corps terminés par des plans.

X L V.

PL. XIII. LE plus simple de tous les solides courbes, est le cylindre; c'est un corps comme ABCDEF, dont les deux bases ABC, DEF, sont deux cercles égaux joints par une surface courbe qu'on peut imaginer formée par un plan plié autour de leurs circonférences.

Le cylindre est un solide terminé par deux bases opposées & parallèles, qui sont des cercles égaux, & par un plan plié autour de leurs circonférences.

FIG. I.

On le distingue en cylindre droit, & en cylindre oblique.

Lorsque les deux cercles sont placés de façon que le centre G du premier réponde perpendiculairement au-dessus du centre H du second, le cylindre se nomme droit.

Le cylindre se nomme au contraire

oblique, lorsque la ligne tirée par les deux centres G & H, est oblique à l'égard des plans ABC, DEF.

FIG. 2.

XLVI.

LA formation géométrique de ces solides, analogue à celles des prismes & des parallépipèdes, dont il a été parlé (Article XVII.) consiste à faire mouvoir un cercle parallèlement à lui-même, en sorte que tous ses points décrivent des lignes droites parallèles qui s'élèvent hors du plan de ce cercle.

Formation
du cylindre.

XLVII.

ON parviendra, de la manière suivante, à mesurer la surface d'un cylindre droit; ce qui est souvent nécessaire dans la pratique.

Les deux circonférences ABC, DEF,

FIG. 1.

étant partagées chacune en un même nombre de parties égales, les points de division répondant les uns au-dessus des

autres, qu'on tire des lignes droites qui joignent les angles correspondans des deux polygones réguliers que donne cette opération. Il est clair qu'on aura alors un prisme dont la superficie sera composée d'autant de rectangles renfermés dans la surface du cylindre, qu'il y a de côtés renfermés dans chacune des circonférences ABC , DEF . Or tous ces rectangles ayant chacun leur hauteur égale à AD , leur mesure totale fera le produit de la hauteur AD par la somme de toutes les bases, c'est-à-dire, par le contour du polygone renfermé ou inscrit dans le cercle DEF ou ABC .

Mais comme à mesure que le nombre des côtés de ce polygone sera grand, le contour du polygone approchera, de plus en plus, d'être égal à la circonférence, & la surface du prisme d'être égale à celle du cylindre; il s'enfuit que si on imagine que le nombre des côtés de ce polygone devienne infini, le prisme ne

La surface
courbe d'un
cylindre

différera pas du cylindre. La surface courbe du cylindre droit est donc égale à un rectangle dont la hauteur seroit AD, & la base une ligne droite égale à la circonférence DEF.

droit est égal
le à un rec-
tangle qui a
la même hau-
teur, & dont
la base est
égale à la cir-
conférence.

Cette proposition peut servir à trouver, par exemple, ce qu'il faudroit d'étoffe pour envelopper un pilier cylindrique, ou pour tapisser le dedans d'une Tour ronde.

XLVIII.

QUANT à la surface du cylindre oblique, on ne peut pas la mesurer de la même manière, parce qu'au lieu de rectangles, on auroit des parallélogrammes de hauteurs différentes. Ce n'est que par des méthodes très compliquées & très-difficiles, qu'on est parvenu à connoître seulement la valeur approchée de cette surface; & les problèmes de ce genre ne sont pas du ressort des élémens.

XLIX.

A l'égard de la solidité des cylindres, soit droits, soit obliques, rien ne sera plus aisé que de la trouver. Car il est évident que tout ce que nous avons dit des prismes, conviendra aux cylindres, si on regarde les cylindres comme les derniers des prismes qu'on peut leur inscrire.

Les cylindres qui ont même base & même hauteur, sont égaux en solidité.

Ainsi les cylindres qui auront même base & même hauteur, seront égaux en solidité.

L.

La mesure d'un cylindre quelconque est le produit de sa base par sa hauteur.

Et la mesure d'un cylindre quelconque consistera dans le produit de sa base par sa hauteur.

LI.

LE cone est le solide courbe le plus simple après le cylindre ; c'est une figure comme ABCDE, dont la base est un cercle, & dont la surface est com-

FIG. 3. & 4.

posée d'une infinité de lignes droites, qui aboutissent toutes du sommet A à la circonférence BCDE de ce cercle. On peut regarder ce solide comme une pyramide dont la base seroit un cercle.

Le cone est une espèce de pyramide, dont la base est un cercle.

LII.

SI, comme dans la figure 3, la pointe ou sommet A du cone répond perpendiculairement au-dessus du centre O de la base, le cone est nommé cone droit; & il est nommé oblique, si le sommet répond à un point différent du centre de la base, ainsi que dans la figure 4.

On le distingue en cone droit & en cone oblique.

LIII.

POUR mesurer la surface d'un cone droit ABCDE, on le regardera comme la dernière des pyramides qu'on peut lui inscrire; c'est-à-dire, qu'on divisera la circonférence de sa base BCDE, ainsi qu'on a fait de la circonférence du cylindre, en une infinité de petits côtés, & tirant des lignes de tous

FIG. 3.

les angles au sommet du cone A ; on trouvera que la superficie conique est un assemblage d'une infinité de petits triangles isocèles , dont la hauteur est égale au côté AB du cone , & dont toutes les bases ajoûtées ensemble , sont égales à la circonférence BCDE ; d'où il est aisé de voir que la mesure de cette surface se trouvera en multipliant la moitié de AB par la circonférence BCDE.

La surface d'un cone droit se mesure en multipliant la moitié de son côté par la circonférence de sa base.

L I V.

Si on se rappelle maintenant que la surface d'un secteur de ce cercle est égale (III. Part. Art. X.) est égale au produit de l'arc de ce secteur par la moitié du rayon , on verra que pour envelopper le cone droit ABCDE d'une surface pliante comme du carton , &c. il faudroit prendre un secteur de cercle, dont le rayon fût égal à AB , & dont l'arc fût égal à la circonférence BCDE.

Le développement d'un cone est un secteur de cercle.

LV.

LORSQUE le cone est oblique, la mesure de sa surface, ainsi que celle du cylindre oblique, est fort difficile à connoître même d'une manière approchée, & c'est encore un problème au-dessus des Elémens.

LVI.

QUANT à la solidité des cones, soit droits, soit obliques, on les regardera comme les dernières des pyramides qu'on pourroit leur inscrire, & on pourra leur appliquer en conséquence ce qu'on a dit des pyramides en général.

Ainsi les cones qui auront même base & même hauteur, feront égaux.

Les cones qui ont même base & même hauteur sont égaux.

LVII.

ET la solidité d'un cone quelconque sera le produit de la base par le tiers de sa hauteur.

Leur mesure est le produit de la base par le tiers de la hauteur.

L V I I I .

FIG. 5.
& 6.

ON a quelquefois besoin de mesurer un corps comme $BCDEFGH$, qu'on appelle cone tronqué ; c'est la partie qui reste d'un cone $AFGH$, lorsqu'on en a retranché un autre cone plus petit $AB CDE$, par une section parallèle à la base FGH . Il est évident que la mesure de ce solide fera la différence entre les solidités des deux cones $ABCDE$, $AFGH$.

L I X .

QUANT à la surface d'un cone tronqué, s'il a été formé par la section d'un cone droit, on peut trouver quelque chose de plus simple que de mesurer séparément les surfaces des deux cones, & de retrancher l'une de l'autre, on emploiera pour cela la méthode suivante, qui est aisée à imaginer, après ce que nous avons dit, (Article LIV.)

FIG. 6. & 7. Supposons que ALR soit le secteur qu'il

faudroit construire pour pouvoir envelopper le cone $AFGH$; en décrivant du centre A & de l'intervalle AM égal à AB , un arc MP , il est clair que l'espace $MPRL$ seroit une portion de couronne propre à envelopper la surface cherchée du cone tronqué. Or si on imagine que les deux circonférences, dont MP & LR sont des arcs semblables, soient achevées, on aura une couronne entière, dont la mesure (III. Part. Art. VIII.) sera le produit de ML , égal à BF par la circonférence dont AN est le rayon, N étant le milieu de ML . Donc la portion de couronne $MPRL$, ou la surface du cone tronqué $BCDEFGH$ qui lui est égale, se mesurera en multipliant ML par l'arc NQ ; ou, ce qui revient au même, en multipliant BF par la circonférence IKL , que donne la section du solide proposé par un plan parallèle à la base, & qui passe par le milieu I du côté BF .

Manière de mesurer la surface d'un cone tronqué.

L X.

La sphère est le corps dont la surface a tous ses points également éloignés du centre.

LE dernier des corps solides que nous traiterons, se nomme sphère ou globe ; c'est celui dont la surface a tous ses points également éloignés d'un même point qui en est le centre. On a souvent besoin de mesurer cette surface ; on voudra sçavoir, par exemple, ce qu'il faudroit de dorure pour une boule, combien on devroit prendre de lames de plomb pour couvrir un dôme, &c.

L X I.

FIG. 8. SOIT X la sphère dont on veut mesurer la superficie, il est évident qu'on peut concevoir ce solide comme produit par la révolution d'un demi-cercle AMB , autour de son diamètre AB .

Supposons d'abord qu'au lieu de la demi-circonférence, nous ayons un poligone régulier d'un nombre infini

de petits côtés, ou, si on veut, d'un très-grand nombre de côtés; & proposons-nous seulement de mesurer la surface Z , produite par la révolution de ce polygone. Il sera facile de passer ensuite de la mesure de cette surface à la mesure de la surface de la sphère, ainsi que nous avons passé de la mesure des figures rectilignes à celle du cercle.

FIG. 9.

LXII.

POUR mesurer la surface du solide Z , examinons la petite partie de cette surface, que produit un seul côté quelconque Mm du polygone inscrit, pendant qu'il tourne autour du diamètre AB . Il est évident que ce côté Mm décrit dans ce mouvement une surface de cône tronqué V . Car en prolongeant la droite mM jusqu'à ce qu'elle rencontre en T le diamètre ou axe de révolution AB , si cette ligne TMm tourne en même tems que le demi-cercle AMB , elle

PL. XIV.

FIG. 1.

Nij

décriera visiblement un cône droit ; dont le sommet fera T ; & la base , le cercle décrit par le point m ; en sorte que la surface V , produite par le mouvement de Mm , fera une tranche de ce cône , enfermée entre les plans de ces cercles que les points M & m décrivent en tournant. Mais selon que nous l'avons vû (Article LIX.) , la surface V est égale à un rectangle dont Mm est la hauteur , & la base , une ligne égale à la circonférence KLO , décrite par le point K , milieu de Mm . Donc la surface produite par la révolution du polygone est égale à la somme d'autant de rectangles de cette nature , qu'il y a de côtés dans ce polygone , tels que Mm .

Or comme tous les côtés Mm , hauteurs de ces rectangles , sont supposés égaux , on pourroit regarder la surface cherchée comme un rectangle total qui auroit la hauteur Mm , avec une base égale à la somme de toutes les circon-

férences telles que KL , c'est-à-dire, décrites par le point de milieu de chaque petit côté.

Mais le poligone inscrit dans le demi cercle AMB , ayant un très-grand nombre de côtés, la petitesse de la hauteur Mm , & la grandeur excessive de la base, rendent ce rectangle inconstruc-
tible.

Pour remédier à cet inconvénient, il est bien aisé d'imaginer de changer tous ces petits rectangles en d'autres qui auroient toujours une même hauteur, non pas imperceptible comme Mm , mais assez grande pour que chacune des bases devînt fort petite; moyennant cela, l'addition de toutes ces petites bases ne fera plus qu'une longueur comparable à la hauteur.

LXIII.

VOYONS donc si nous ne pourrons point changer de cette sorte nos petits rectangles. Supposons d'abord, pour

FIG. 2. simplifier le problème, que nos rectangles, au lieu d'avoir pour bases des lignes égales aux circonférences KL , n'aient pour bases que les rayons KI de ces circonférences. Il ne nous sera pas difficile ensuite d'appliquer ce que nous aurons trouvé pour ces derniers rectangles, à ceux dont nous avons affaire.

Il s'agit donc de trouver un rectangle qui ait pour mesure le produit de Mm par KI , & qui ait pour hauteur quelque ligne incomparablement plus grande que Mm , & qui soit la même en quelque endroit que soit placé ce petit côté Mm . Choisissons, par exemple, la droite CK , qui est l'apothème du poligone dont Mm est le côté, & qui, par conséquent, est toujours la même, à quelque côté du poligone qu'elle appartienne. Nous devons donc chercher une ligne dont le produit par CK soit égal au produit de KI par Mm ; c'est-à-dire (II. Part. Art. VII.) qu'il faut

trouver une quatrième proportionnelle aux trois lignes KC , KI , Mm . Or nous sçavons que c'est par le moyen des triangles semblables, qu'on découvre des lignes proportionnelles dans les figures, il faut donc former des triangles semblables, dont les côtés homologues soient les lignes en question; c'est ce qu'on fera en abaissant MR , perpendiculaire à mp . On aura alors les triangles MmR , KIC , qui seront semblables; car ils seront chacun rectangle, l'un en R , l'autre en I , & de plus, ils auront les angles mMR , IKC égaux entr'eux, à cause que le premier fait un angle droit avec l'angle MmR , égal à l'angle MKI , & que l'autre IKC fait aussi un droit avec MKI .

De-là on peut conclure facilement que KC est à KI , comme Mm à MR ; c'est-à-dire, que MR est la quatrième proportionnelle cherchée; ou, ce qui revient au même, que le rectangle de KC par MR ou par Pp , est égal

au rectangle de Mm par KI .

Mais comme le rectangle que nous nous étions d'abord proposés de changer, n'étoit pas celui de Mm par KI , que c'étoit celui de Mm par la circonférence dont KI est le rayon; nous nous rappellerons ici que les circonférences sont entr'elles comme les rayons; ce qui fait que l'égalité qui est entre le rectangle de Mm par KI , & celui de Pp par CK , entraîne nécessairement l'égalité du rectangle de Mm par la circonférence de KI , au rectangle de Pp , par la circonférence de CK . Car on sent facilement que si deux rectangles sont égaux, & que conservant leurs hauteurs, on augmente proportionnellement leurs bases, ces rectangles demeureront encore égaux.

L X I V.

A Y A N T découvert dans les deux Articles précédens que toutes les petites surfaces coniques tronquées, telle

que V (Fig. 1.) font égales à autant de rectangles qui auroient tous pour hauteur une même droite égale à la circonférence, dont KC seroit le rayon, & dont chacun auroit pour base une petite droite Pp , correspondant à chaque côté Mm ; on en déduira qu'une somme quelconque de ces petites surfaces, prise depuis A jusqu'en p , par exemple, fera égale à un rectangle qui auroit pour hauteur une droite égale à la circonférence de CK , & pour base la somme de toutes les lignes telles que Pp , prises depuis A jusqu'en p , c'est-à-dire, la droite Ap .

Donc pour avoir la surface totale produite par la révolution du poligone entier, il faudra faire un rectangle dont la base soit égale à la circonférence décrite du rayon CK , & qui ait une hauteur égale au diamètre AB .

L X V.

IL est bien aisé maintenant de mesurer la surface de la sphère. Car il

est clair que plus il y aura de côtés dans le poligone, plus le solide produit par sa révolution approchera d'être égal à la sphère, & plus aussi l'apothême *CK* approchera d'être égal au rayon, en sorte que si on peut imaginer que le poligone soit devenu un cercle, l'apothême *CK* sera le rayon même, & la surface de la sphère aura la même étendue qu'un rectangle dont la hauteur & la base seroient, l'une le diamètre, & l'autre une ligne égale à la circonférence du cercle qui l'a produite, & qu'on appelle ordinairement le grand cercle de la sphère.

La surface de la sphère a pour mesure le produit de son diamètre par la circonférence de son grand cercle.

L X V I.

Ce que c'est qu'un segment de sphère.

* FIG. 3.

QUANT à la surface courbe d'un segment de sphère *AMLNO** ; c'est-à-dire, de la partie de la sphère qu'on en retranche, lorsqu'on la coupe par un plan *MLNO*, perpendiculaire au diamètre ; elle a pour mesure le produit de son épaisseur ou flèche *AP* par la circonférence du grand cercle *AM*

Comment on mesure sa surface.

BN. La raison en est la même que celle par laquelle on a prouvé (Article LXIV.) que la somme des surfaces de tous les petits cones tronqués, compris depuis A jusqu'en m , est égale au rectangle dont la hauteur est Ap , & la base une ligne égale à la circonférence dont CK est le rayon.

FIG. 2.

LXVII.

LA mesure précédente de la surface de la sphère, apprend que si on fait tourner le rectangle ABDE en même-tems que le demi cercle AMNB autour de AB, la surface courbe du cylindre droit EFGIKDH produit par la révolution de ce rectangle, sera égale à celle de la sphère décrite par le demi-cercle; ce qu'on exprime ordinairement ainsi; la surface de la sphère est égale à celle du cylindre circonscrit.

FIG. 4.

La surface de la sphère est égale à celle du cylindre circonscrit.

LXVIII.

ET si on coupe, tant le cylindre, que la sphère, par deux plans quelconques

Les tranches
du cylindre
& de la sphé-
re ont la mê-
me superfi-
cie.

perpendiculaires au diamètre AB , en P & en Q , les tranches de la sphère & du cylindre qui seront produites par le mouvement de la droite OS , & de l'arc MN , seront égales en superficie.

L X I X.

La surface
de la sphère
est égale à
quatre fois
celle de son
grand cercle.

ON voit encore, par ce qui précède, que la surface de la sphère est égale à quatre fois l'aire de son grand cercle; car la surface de ce grand cercle a pour mesure le produit de la moitié du rayon ou du quart du diamètre par la circonférence, & la superficie de la sphère est égale au produit du diamètre entier par la même circonférence.

L X X.

LA mesure de la surface de la sphère étant trouvée, il est bien aisé de mesurer sa solidité; car on peut considérer la sphère comme l'assemblage d'une infinité de petites pyramides, dont les sommets sont à son centre, & dont toutes les bases couvrent sa surface entière. Or

chacune de ces pyramides ayant pour mesure le produit du tiers de sa hauteur c'est-à-dire, du rayon, par sa base, leur somme totale ou la solidité de la sphère se mesurera en multipliant le tiers du rayon par sa surface, c'est-à-dire, par quatre fois l'aire du grand cercle.

La solidité de la sphère est le produit du tiers du rayon par quatre fois l'aire du grand cercle.

LXXI.

COMME le produit du tiers du rayon par quatre fois le grand cercle, est la même chose que le produit de quatre fois le tiers du rayon, c'est-à-dire, des deux tiers du diamètre par le grand cercle, & que la solidité du cylindre EFGIKDH a pour mesure le produit du diamètre par le même grand cercle qui lui sert de base; il s'ensuit que la solidité de la sphère est les deux tiers de celle du cylindre circonscrit.

La solidité de la sphère est les deux tiers de celle du cylindre circonscrit.

LXXII.

Si on se propoisoit de mesurer la

Mesure de la
solidité d'un
segment de
sphère.

* FIG. 3.

solidité d'un segment de sphère $AMLNO^*$, il est évident qu'il faudroit d'abord mesurer la portion de sphère produite par la révolution du secteur CAM ; ce qui se feroit en multipliant le tiers du rayon par la surface du segment de sphère proposé $AMLNO$: ensuite on retrancheroit de cette mesure celle du cone produit par la révolution du triangle CPM , c'est-à-dire, le cone dont la base est le cercle $MLNO$, & CP la hauteur, & le reste seroit la valeur demandée du segment.

L X X I I I.

Nous finirons ces Elémens par quelques Propositions sur la solidité & sur la superficie des corps semblables. Ces Propositions se présentent fort naturellement, lorsqu'on réfléchit sur ce qui constitue la similitude de deux corps. On peut dire même qu'on ne peut guères manquer de les décou-

vrir par analogie , si on se rappelle ce que nous avons dit (I. Part. Art. XXXIV. & suiv.) de la similitude des figures planes ; c'est-à-dire , de celles qui sont décrites sur des plans.

Nous avons déterminé (Art. XXXII.) en quoi consiste la similitude de deux pyramides ; la définition que nous avons donnée alors des pyramides semblables, peut s'étendre à tous les corps terminés par des plans : c'est-à-dire , que deux corps de cette nature seront appelés semblables, si tous les angles formés par les côtés du premier sont les mêmes que les angles formés par les côtés du second , & si les côtés d'un de ces corps sont proportionnels aux côtés homologues de l'autre.

En quoi consiste la similitude de deux corps terminés par des plans.

LXXIV.

QUANT aux corps qui ne sont pas terminés de tous les côtés par des plans, les cylindres & les cones , par exemple, il est aussi facile de déterminer les condi-

tions nécessaires pour les rendre semblables.

Conditions qui déterminent la similitude de deux cylindres droits.

Deux cylindres droits seront semblables, si leurs hauteurs sont en même raison que les rayons de leurs bases.

LXXV.

Celle de deux cylindres obliques.

Si les cylindres sont obliques, il faudra, de plus, que les lignes qui joignent les centres des deux cercles, dans chacun de ces cylindres, fassent les mêmes angles sur les plans de leurs bases.

LXXVI.

Celle de deux cônes.

Les mêmes définitions peuvent s'appliquer aux cônes, en mettant au lieu de la ligne qui passe par les centres des deux bases du cylindre, celle qui va du sommet du cône au centre du cercle qui lui sert de base.

LXXVII.

POUR que deux cônes tronqués soient semblables, il faut, en premier lieu, que les cônes dont ils sont portions

tions soient semblables l'un à l'autre ; & en second lieu , que leurs hauteurs soient entr'elles comme les rayons de leurs bases.

Celle de deux cônes tronqués.

LXXVIII.

A l'égard des sphères , on voit bien qu'elles sont toutes semblables les unes aux autres , ainsi que toutes les figures, soit solides, soit planes , qui n'ont besoin que d'une seule ligne pour être déterminées , comme le cercle , le quarré , le triangle équilatéral , le cube , le cylindre circonscrit à la sphère , &c.

Les sphères, les cubes , & toutes les figures qui ne dépendent que d'une seule ligne , sont toutes semblables.

LXXIX.

EN général on pourra dire des figures solides semblables , comme on l'a dit des figures planes , qu'elles ne diffèrent que par les échelles sur lesquelles elles ont été construites.

En général les solides semblables ne diffèrent que par les échelles sur lesquelles ils sont construits.

Cet exposé seul bien considéré , conduit à deux propositions fondamentales

Q

sur la superficie & sur la solidité des corps semblables.

L X X X.

Les surfaces
des solides
semblables
sont entr'elles
comme les
quarrés de
leurs côtés
homologues.

Fig. 5.
& 6.

LA premiere Proposition apprend que les surfaces de deux solides semblables, sont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues ; qu'il y a, par exemple, même rapport entre les surfaces des deux pyramides semblables z & Z , qu'entre les quarrés $abcd$, $ABCD$, faits sur les côtés ab , AB , qui se répondent dans ces deux pyramides.

Pour découvrir cette Proposition, on n'a besoin que des raisonnemens qu'on a employés (I. Part. Art. XLIII. & XLIV.), c'est-à-dire, qu'il faut seulement considérer que si P est l'échelle de la pyramide Z , & p l'échelle de la pyramide semblable z , les lignes qu'il faudra employer pour mesurer la surface de Z , & celle du quarré $ABCD$, auront le même nombre de P , qu'il y

aura de parties p dans celles qu'il faut employer pour mesurer la surface de z , & celle du quarré $abcd$.

Car de-là il suit que le produit des lignes qui entrent dans la mesure de Z & de $ABCD$, donnera le même nombre de quarrés X faits sur P , que le produit des lignes employées à mesurer z & $abcd$ donnera de quarrés x faits sur p . C'est-à-dire, que les nombres qui exprimeront le rapport de la surface de la pyramide Z au quarré $ABCD$, seront les mêmes que ceux qui exprimeront le rapport de la surface z au quarré $abcd$.

On feroit le même raisonnement dans la comparaison de tous les autres corps semblables, soit que ces corps fussent terminés par des plans, soit qu'ils fussent terminés par des surfaces courbes; car les lignes employées à mesurer les superficies de tous ces corps, auront toujours le même nombre des parties de leurs échelles, & par conséquent, les produits de ces lignes contiendront un

même nombre de fois les quarrés de ces mêmes parties.

Et si les lignes nécessaires pour mesurer la superficie des corps semblables, étoient incommensurables, il est clair que la démonstration subsisteroit toujours, pourvu qu'on employât ici les principes dont on s'est servi (II. Part. Art. XXVIII.) pour comparer les figures semblables, dont les côtés étoient incommensurables.

L X X X I.

Les surfaces
des sphères
sont entr'elles
comme les
quarrés de
leurs rayons.

ON prouveroit de la même façon, que les surfaces des sphères sont entr'elles comme les quarrés de leurs rayons. Mais, pour le voir encore plus clairement d'une autre maniere, il suffira de se rappeler que les surfaces des cercles sont entr'elles comme les quarrés de leurs rayons (III. Part. Art. VI.), & que les surfaces des sphères sont quadruples de leurs grands cercles (Art. LXIX.)

LXXXII.

LA proportionnalité entre les surfaces des corps semblables & les quarrés de leurs côtés homologues, est si générale qu'elle s'applique autant aux corps qu'on ne sçait pas mesurer, qu'à ceux dont on connoît la mesure.

Sans sçavoir mesurer, par exemple, la surface d'un cylindre oblique, on peut affirmer que les surfaces de deux cylindres obliques semblables sont entr'elles comme les quarrés des diamètres des bases de ces cylindres. Car en inscrivant dans ces deux cylindres deux prismes semblables de tant de faces qu'on voudra, on verra, par ce qui précède, que les surfaces de ces prismes seront entr'elles comme les quarrés des diamètres des bases. Donc les cylindres mêmes, considérés comme les derniers des prismes inscrits auront leurs surfaces dans le même rapport.

L X X X I I I .

Les solides
semblables
font entr'eux
comme les
cubes de leurs
côtés homo-
logues.

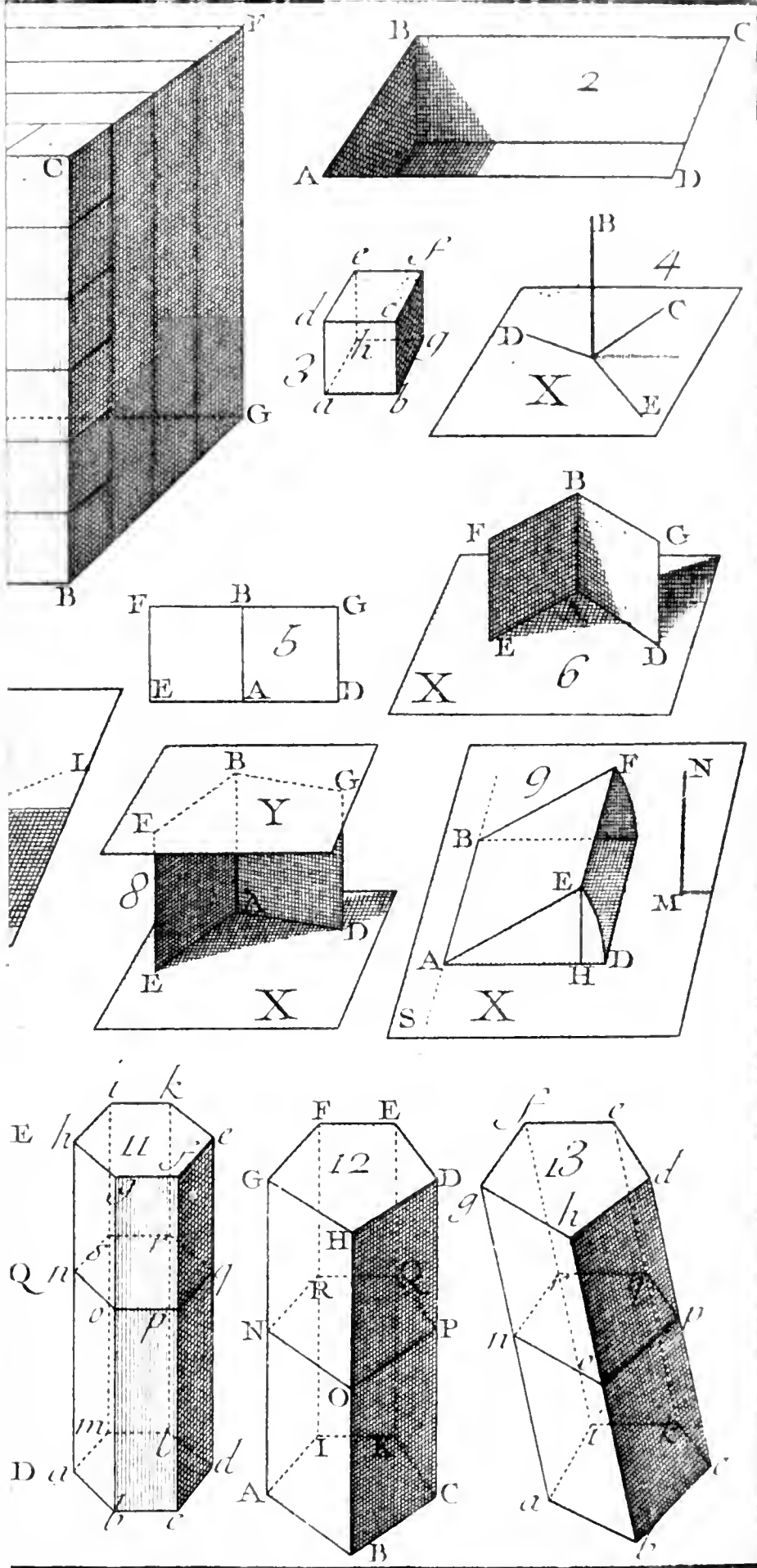
LA Proposition fondamentale pour la comparaison de la solidité des corps semblables est celle-ci.

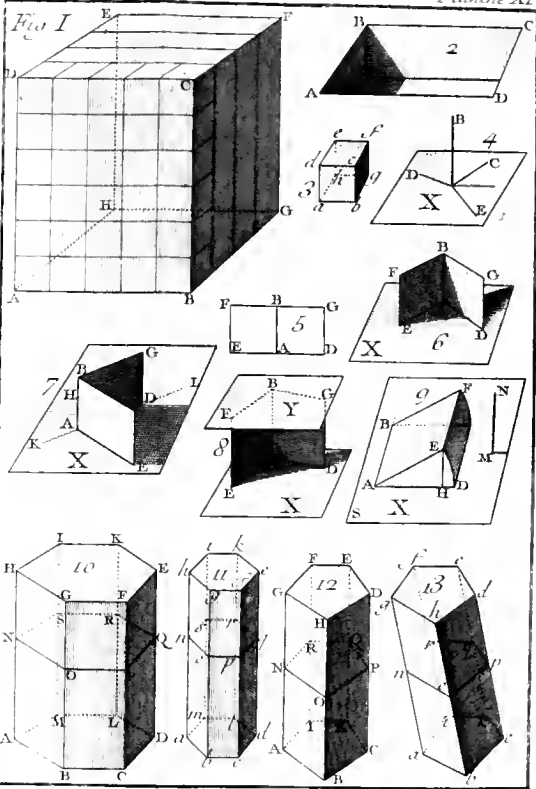
Les solides semblables font entr'eux comme les cubes de leurs côtés homologues.

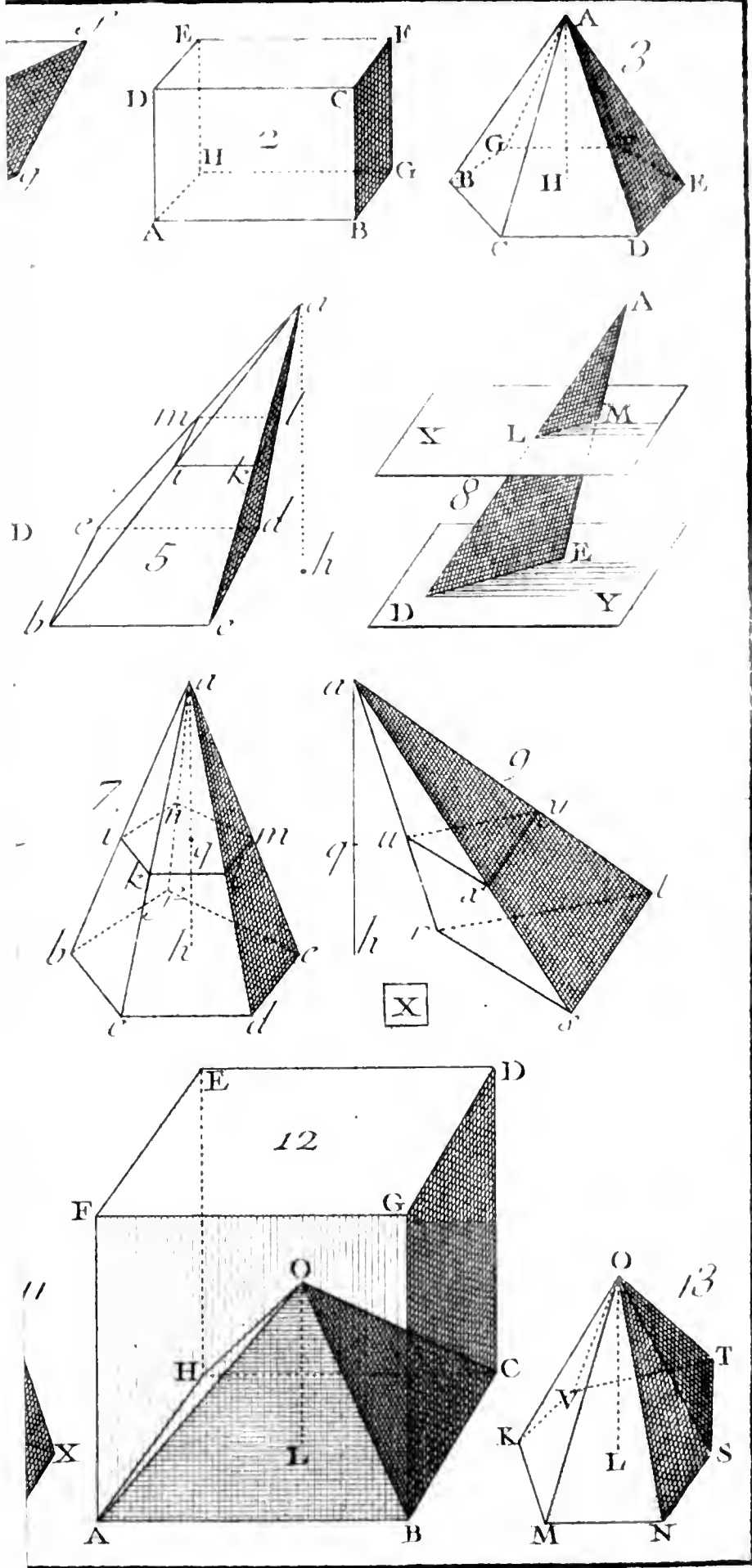
Cette Proposition se peut démontrer comme la précédente, en considérant que les figures semblables ne diffèrent que par les échelles sur lesquelles elles sont construites.

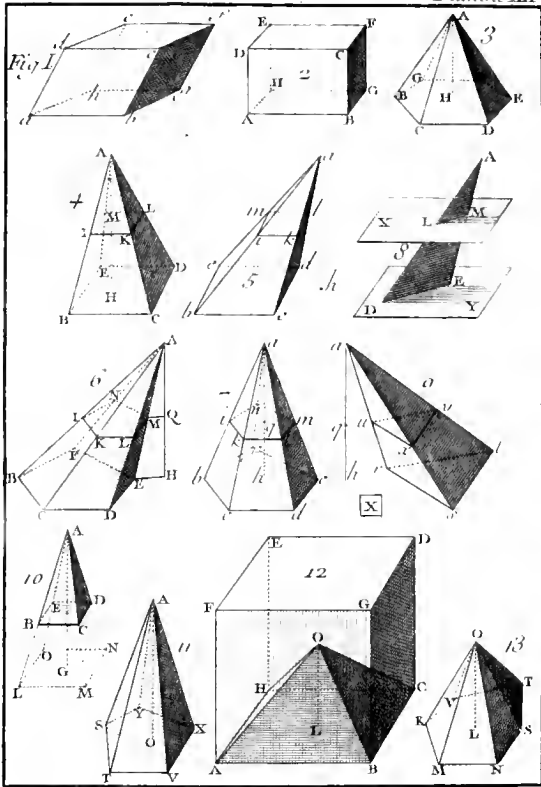
Pour le faire voir le plus simplement qu'il nous sera possible, nous nous servirons, par exemple, des deux prismes semblables Z & z , & des deux cubes X & x , dont les côtés font égaux à AB , ab , lignes analogues dans ces deux prismes; & nous prendrons de plus deux échelles AB , ab , divisées en un assez grand nombre de parties, pour pouvoir mesurer les dimensions de ces solides: or cela posé, il est clair qu'il se trou-

FIG. 7.
& 8.









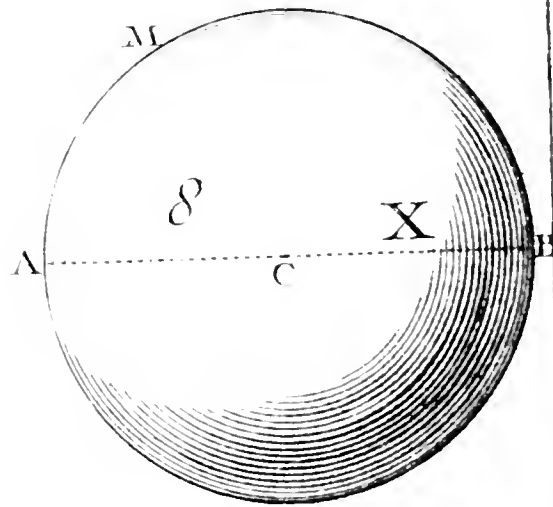
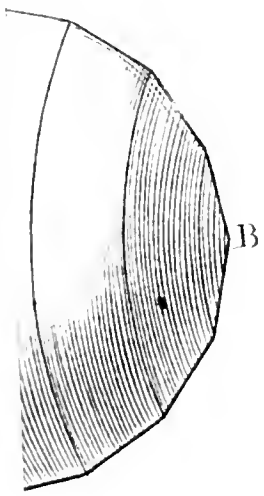
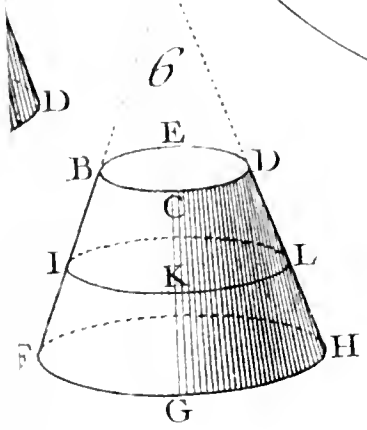
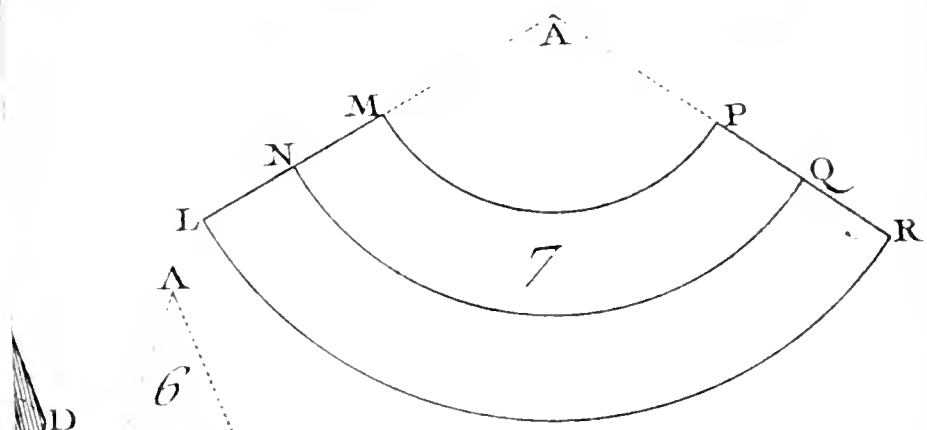
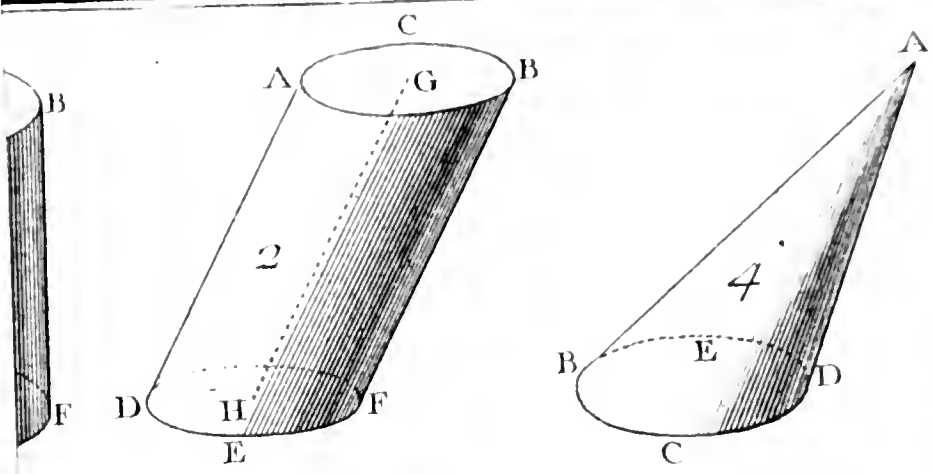
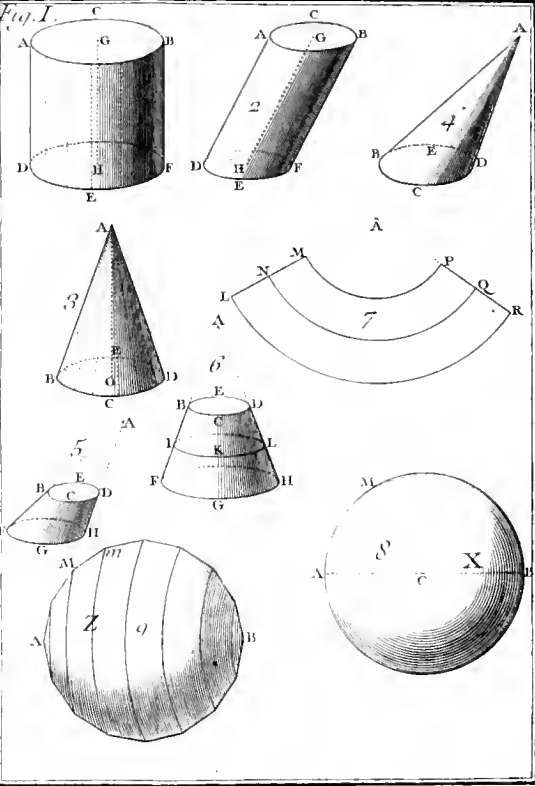
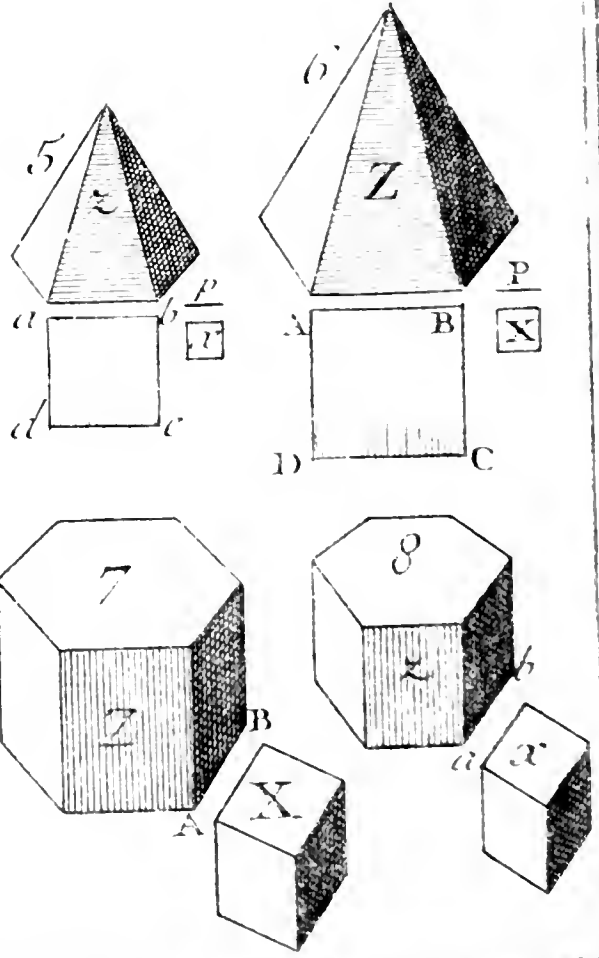
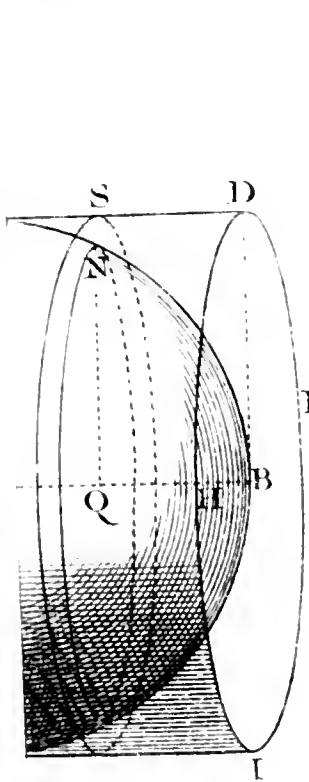
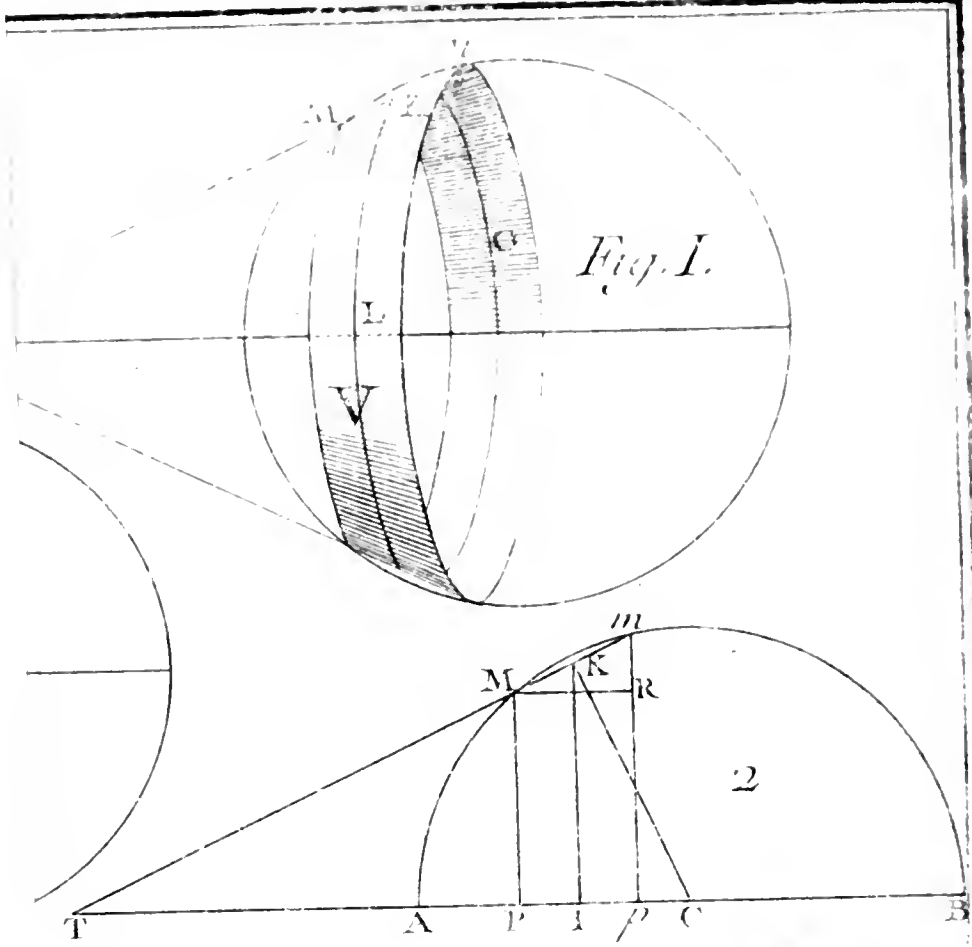
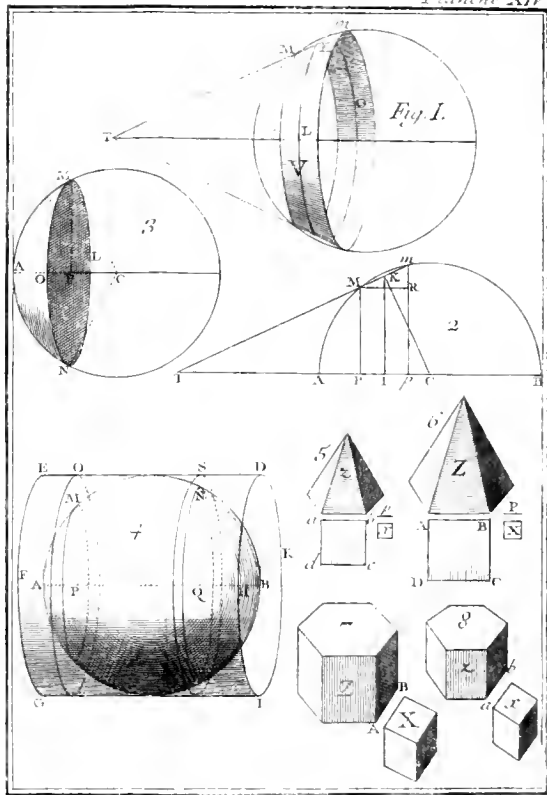


Fig. I.







vera précisément autant de cubes faits sur les parties de ab , dans le prisme α , & dans le cube x , que de cubes faits sur les parties de AB dans le prisme Z & dans le cube X .

On feroit le même raisonnement pour tous les autres solides ; & ceux qui pourroient avoir des dimensions incommensurables, feroient aussi dans la même raison que les cubes de leurs côtés homologues.

LXXXIV.

Les solidités des sphères, par exemple, sont évidemment entr'elles, comme les cubes de leurs rayons.

Les sphères sont entr'elles comme les cubes de leurs rayons.

F I N.

Fautes à corriger.

- P**Age 8 , ligne 9 , *éloignées* , lisez *éloignée* :
- P. 23 , Art. XXI. lisez XXIII.
- P. 40 , l. 10 , *ce qui* , lisez *ce qu'il*.
- P. 55 , l. 2 , BAC , lisez bAc.
- P. 81 , l. 13 , *est la seconde* , lisez *est à la seconde*.
- P. 84 , l. 4 de l'apostille , après *quatrième* , ajoutez *terme*.
- P. 94 , l. 13 , *par* , lisez *pas*.
- P. 108 , dern. ligne de la seconde apostille , au lieu de *circonfé* , lisez *circonférence*.
- P. 133 , l. 9 , *mêmes angles* , lisez *angles égaux*.
- P. 151 , l. 16 , *de même qu'un plan* , lisez *de même ; qu'un plan*.
- P. 155 , l. 18 , après *d'égale longueur* , ajoutez *& qui ne soient pas posées en ligne droite*.
- P. 170 , l. 3 , *seroient toujours les mêmes* , lisez *auroient toujours la même solidité*.
- P. 184 , l. 13 , après *égaux* , ajoutez *& parallèles*.

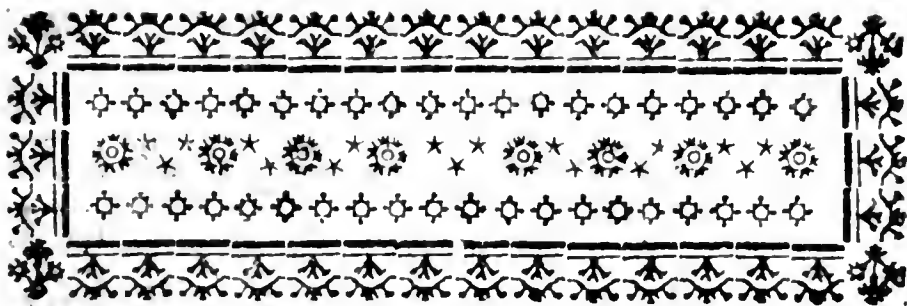


TABLE DES MATIERES.

PREMIERE PARTIE.

Des moyens qu'il étoit le plus naturel d'employer pour parvenir à la mesure des Terrains.

II. **L** *A ligne droite est la plus courte d'un point à un autre, & par conséquent ; la mesure de la distance entre deux points.* page 2

III. *Une ligne qui tombe sur une autre, sans pancher sur elle d'aucun côté, est perpendiculaire à cette ligne.* 3

IV. *Le rectangle est une figure de quatre* a

- côtés perpendiculaires les uns aux autres. 4
- Et le quarré est un rectangle dont les quatre côtés sont égaux. ibid.
- V. Manière d'élever une perpendiculaire. ibid.
- VI. Le cercle est la trace entière que décrit la pointe mobile d'un compas, pendant qu'elle tourne autour de l'autre pointe. 7
- Le centre est le lieu de la pointe fixe. ibid.
- Le rayon est l'intervalle dont le compas est ouvert. ibid.
- Le diamètre est le double du rayon. ibid.
- VII. Maniere d'abaisser une perpendiculaire. ibid.
- VIII. Couper une ligne en deux parties égales. 8
- IX. Faire un quarré, ayant son côté. 9
- X. Faire un rectangle, dont la longueur & la largeur sont données. ibid.
- XI. Les parallèles sont des lignes toujours également distantes les unes des autres.

Mener une parallèle à une ligne par un point donné. ibid.

XII. *La mesure d'un rectangle est le produit de sa hauteur par sa base.* 13

XIII. *Les figures rectilignes sont celles que terminent des lignes droites.* 14

Le triangle est une figure terminée par trois lignes droites. ibid.

XIV. *La diagonale d'un rectangle est la ligne qui le partage en deux triangles égaux.* 15

Les triangles rectangles sont ceux qui ont deux de leurs côtés perpendiculaires l'un à l'autre. 16

Un triangle est la moitié du rectangle qui a même base & même hauteur. ibid.

Donc sa mesure est la moitié du produit de sa hauteur par sa base. ibid.

XV. *Les triangles qui ont même hauteur & même base, ont des superficies égales.* 17

XVII. *Les triangles qui ont même base, & qui sont renfermés entre les mêmes parallèles, sont égaux en superficie.* 19

- XVIII. *Les parallélogrammes sont des figures de quatre côtés, dont les deux opposés sont parallèles.* 20
On les mesure en multipliant leur hauteur par leur base. ibid.
- XIX. *Les parallélogrammes qui ont une base commune, & qui sont entre les mêmes parallèles, sont égaux en superficie.* ibid.
- XX. *Les polygones réguliers sont des figures que terminent des côtés égaux, & également inclinés les uns sur les autres.* 21
- XXI. *Manière de décrire un polygone d'un nombre déterminé de côtés.* 22
Le pentagone a cinq côtés, l'exagone six, l'eptagone sept, l'octogone huit, l'enneagone neuf, le décagone dix, &c. ibid.
- XXII. *Mesure de la surface d'un polygone régulier.* 23
L'apothème est la perpendiculaire abaissée du centre de la figure sur un de ses côtés. ibid.

DES MATIERES. v

XXIII. *Le triangle équilatéral est celui dont les trois côtés sont égaux.* 24

Manière de le décrire. ibid.

XXVI. *Connoissant les trois côtés d'un triangle, faire un autre triangle qui lui soit égal.* 27

XXVII. *Un angle est l'inclinaison d'une ligne sur une autre.* 29

XXVIII. *Manière de faire un angle égal à un autre.* ibid.

Deux côtés & l'angle compris étant donnés, le triangle est déterminé. 30

XXIX. *Seconde manière de faire un angle égal à un autre.* 31

La corde d'un arc de cercle, est la droite que terminent les deux extrémités de l'arc. ibid.

XXX. *Deux angles & un côté déterminent le triangle.* 32

XXXI. *Le triangle isocèle, est celui qui a deux côtés égaux.* ibid.

Les angles que ces côtés font avec la base, sont égaux entr'eux. 33

XXXIV. *En quoi consiste la ressem-*

- blance de deux figures.* 36
- XXXVI. *Manière de faire une figure semblable à une autre.* 37
- XXXVIII. *Si deux angles d'un triangle sont égaux à deux angles d'un autre triangle, le troisième angle de l'un égalera le troisième angle de l'autre.* 40
- XXXIX. *Deux triangles, dont les angles sont respectivement égaux, ont leurs côtés proportionnels.* 41
- XL. *Diviser une ligne en tant de parties égales qu'on voudra.* 44
- XLI. *Ce que c'est qu'une ligne quatrième proportionnelle à trois autres, & comment on la trouve.* 45
- XLII. *Les hauteurs des triangles semblables, sont proportionnelles à leurs côtés.* 46
- XLIV. *Les aires des triangles semblables, sont entr'elles comme les quarrés des côtés homologues.* 47
- XLV. *Propriétés des figures semblables, tirées de celles des triangles.* 49

XLVII. *Les aires des figures semblables, sont entr'elles comme les quarrés des côtés homologues.* 52

XLVIII. *Les figures semblables ne sont différenciées que par les échelles sur lesquelles elles sont construites.* Ibid.

L. *Manière de mesurer la distance d'un lieu inaccessible.* 54

LII. *Un angle a pour mesure l'arc de cercle qu'interceptent ses côtés.* 56

LIII. *Le cercle est partagé en 360 degrés; chaque degré en 60 minutes, &c.* 57

LIV. *L'angle droit a 90 degrés, & ses côtés sont perpendiculaires l'un à l'autre.* 58

LV. *Un angle aigu est plus petit qu'un angle droit.* Ibid.

LVI. *Un angle obtus est plus grand qu'un angle droit.* Ibid.

LVII. *La somme des angles, fait du même côté sur une ligne droite, & qui ont le même sommet, vaut 180 degrés.* Ibid.

LVIII. *Tous les angles qu'on peut faire autour d'un même point, sont égaux,*

- pris ensemble , à quatre droits. 59*
- LIX.** *Usage de l'instrument appelé demi-cercle , pour prendre la grandeur d'un angle. ibid.*
- LX.** *Usage du rapporteur , pour faire un angle d'un nombre déterminé de degrés. 60*
- LXIII.** *Les angles alternes sont les angles renversés que forme, de part & d'autre, une ligne droite qui tombe sur deux parallèles. 64*
Ces angles sont égaux. ibid.
- LXIV.** *La somme des trois angles d'un triangle , est égale à deux droits. 65*
- LXVIII.** *L'angle extérieur d'un triangle , vaut les deux angles intérieurs opposés. 67*
- LXIX.** *Un angle d'un triangle isocèle donne les deux autres. ibid.*
- LXX.** *Les angles d'un triangle équilatéral , sont chacun de soixante degrés. 68*
- LXXI.** *Description de l'exagone. ibid.*
- LXXII.** *La moitié de l'angle au centre de*

- l'exagone , donne l'angle au centre du dodécagone.* 69
- LXXIII. *Partager un angle en deux également.* 70
- LXXIV. *Description des polygones de 24, 48, &c. côtés.* ibid.
- LXXV. *Description de l'octogone.* 71
Et des polygones de 16 , 32 , &c. côtés. 72
-

SECONDE PARTIE.

De la méthode géométrique de comparer les figures rectilignes.

- I. **D**eux rectangles qui ont même hauteur , sont en même raison que leurs bases. 76
- V. *Manière de changer un rectangle en un autre , qui ait une hauteur donnée.* 77
- VI. *Seconde manière de changer un rectangle en un autre , dont la hauteur soit donnée.* 78

- VII. *On démontre rigoureusement que si deux rectangles sont égaux , la base du premier est à la base du second , comme la hauteur du second à la hauteur du premier.* 80
- VIII. *Si quatre lignes sont telles , que la première soit à la seconde, comme la troisième à la quatrième ; le rectangle formé par la première & par la quatrième sera égal à celui que forment la seconde & la troisième.* 81
- IX. *Quatre quantités , dont la première est à la seconde , comme la troisième à la quatrième , sont dites former une proportion.* ibid.
- X. *Des quatre termes d'une proportion , le premier & le quatrième sont nommés extrêmes ; on nomme moyens le second & le troisième.* 82
- XI. *Dans une proportion , le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.* ibid.
- XII. *Si le produit des extrêmes est égal au produit des moyens , les quatre termes*

DES MATIERES. xj

- forment une proportion.* *ibid.*
- XIII. *De-là on tire la règle de trois ,* 83
Ou la manière de trouver le quatrième
terme d'une proportion , dont les trois
premiers sont donnés. 84
- XVI. *Faire un quarré double d'un autre.*
86
- XVII. *Faire un quarré égal à deux autres*
pris ensemble. 87
- XVIII. *L'hypothénuse d'un triangle rec-*
tangle est son grand côté. 90
Et le quarré de ce côté est égal à la som-
me des quarrés faits sur les deux autres.
 ibid.
- XIX. *D'où se tire une manière simple de*
réduire deux quarrés en un seul. *ibid.*
- XX. *Si les côtés d'un triangle rectangle*
servent de bases à trois figures sembla-
bles , la figure faite sur l'hypothénuse
égalera les deux autres prises ensemble.
 91
- XXI. *Réduire plusieurs figures semblables*
à une seule. 93
- XXIII. *Le produit qui résulte de la mul-*

*tiplication d'un nombre par lui-même ;
est le quarré de ce nombre.* 95

*Là racine d'un quarré, est le nombre qui,
multiplié par lui-même, donne le quarré.*

96

XXIV. *Un nombre est multiple d'un au-
tre , lorsqu'il le contient plusieurs fois
exactement.* *ibid.*

*Le côté d'un quarré & sa diagonale sont
incommensurables.* 97

XXV. *Autres lignes incommensurables.*
ibid.

XXVII. *Les triangles & les figures sem-
blables , ont leurs côtés proportionnels ,
lors même que ces côtés sont incommen-
surables.* 101

XXVIII. *Et ces figures sont toujours en-
tr'elles comme les quarrés de leurs côtés
homologues.* 102



TROISIEME PARTIE.

De la mesure des figures circulaires , & de leurs propriétés.

- I. **L** *A mesure du cercle est le produit de sa circonférence par la moitié de son rayon.* 108
- II. *L'aire du cercle est égale à un triangle dont la hauteur est le rayon , & la base une droite égale à la circonférence. ibid.*
- IV. *Le diamètre d'un cercle ayant 7 parties , la circonférence en a près de 22.* 109
- V. *Les circonférences des cercles , sont entr'elles comme leurs rayons.* 110
- VI. *Les aires des cercles sont proportionnelles aux quarrés de leurs rayons.* 111
- VII. *Des trois cercles qui ont pour rayons les trois côtés d'un triangle rectangle , celui que donne l'hypothénuse vaut les deux autres pris ensemble.* 112
- VIII. *Une couronne est l'espace enfermé*

- entre deux cercles concentriques. 113
- Pour mesurer une couronne, il faut multiplier sa largeur par la circonférence moyenne. 115
- IX. Le segment de cercle est un espace terminé par un arc & par sa corde. 116
- La mesure de toutes les figures circulaires se réduit à celle du segment. *ibid.*
- X. Le secteur est une portion de cercle, terminée par deux rayons, & par l'arc qu'ils comprennent. *ibid.*
- Sa mesure & celle du segment. *ibid.*
- XI. Trouver le centre d'un arc de cercle quelconque. 117
- XIII. Si d'un point quelconque de la circonférence d'un demi cercle, on tire deux droites aux extrémités du diamètre, on aura un angle droit. 120
- XV. Tous les angles dont le sommet est à la circonférence, & qui s'appuient sur le même arc, sont égaux, & ont, pour commune mesure, la moitié de l'arc sur lequel ils s'appuient. 123
- XVIII. La tangente au cercle, est la li-

gne qui ne le touche qu'en un point. 126

L'angle au segment est celui qui est fait par la corde & par la tangente. 127

Sa mesure est la moitié de l'arc du segment. *ibid.*

XIX. *La tangente est perpendiculaire au diamètre qui passe par le point d'attouchement.* 128

XXI. *Ce que c'est qu'un segment capable d'un angle donné.* 129

Manière de faire un segment capable d'un angle donné. *ibid.*

XXII. *Trouver la distance d'un lieu à trois autres dont les positions sont connues.*

131

XXIII. *Deux cordes se coupant dans un cercle, le rectangle des parties de l'une est égal au rectangle des parties de l'autre.*

134

XXIV. *Le quarré d'une perpendiculaire quelconque au diamètre d'un cercle, est égal au rectangle des deux parties du diamètre.*

135

XXV. *Changer un rectangle en un quarré.* *ibid.*

- XXVI. *Ce que c'est qu'une moyenne proportionnelle entre deux lignes droites.* 136
Manière de la trouver. 137
- XXVII. *Autre manière.* *ibid.*
- XXVIII. *Changer une figure rectiligne en un quarré.* 138
- XXX. *Faire un quarré qui soit à un autre en raison donnée.* 139
- XXXI. *Faire un poligone qui soit en raison donnée avec un poligone semblable.* 140
- XXXII. *Faire un cercle qui soit à un autre cercle en raison donnée.* 141
- XXXIII. *Si d'un point pris hors d'un cercle on tire deux lignes qui le traversent, les rectangles de ces deux droites par leurs parties extérieures, seront égaux.* *ibid.*
- XXXIV. *Le quarré de la tangente est égal au rectangle de la secante par sa partie extérieure.* 143
- XXXV. *D'un point donné hors d'un cercle, lui mener une tangente.* *ibid.*

 QUATRIEME PARTIE.

De la manière de mesurer les solides & leurs surfaces.

- I. **L** E cube est une figure solide terminée par six quarrés. C'est la mesure commune des solides. 147
- II. Le parallépipède est un solide terminé par six rectangles. 148
 Les plans parallèles sont ceux qui conservent toujours entr'eux la même distance. ibid.
- III. Mesure du parallépipède. 149
- IV. Les parallépipèdes sont produits par un rectangle qui se meut parallèlement à lui-même. 151.
- V. La ligne perpendiculaire à un plan, est celle qui ne panche d'aucun côté sur ce plan. ibid.
 Il en est de même du plan perpendiculaire à un autre plan. ibid.
- VI. La ligne qui est perpendiculaire à un

- plan est perpendiculaire à toutes les lignes de ce plan , qui partent du point où elle tombe.* 152
- VIII. *Pratique simple pour élever, ou pour abaisser des lignes perpendiculaires à des plans.* 154
- IX. *Une ligne sera perpendiculaire à un plan , si elle est perpendiculaire à deux lignes de ce plan, qui partent du point où elle tombe.* ibid.
- X. *Manière d'élever un plan perpendiculaire à un autre.* 155
- XI. *Mener un plan parallèle à un autre.* ibid.
- XII. *Mesurer l'inclinaison d'un plan sur un autre.* 156
- XIII. *Mesurer l'inclinaison d'une ligne sur un plan.* 157
- XIV. *Nouvelle manière d'abaisser une ligne perpendiculaire à un plan donné.* 158
- XV. *Seconde manière d'élever une ligne perpendiculaire à un plan donné.* ibid.
- XVI. *Le prisme droit est une figure solide,*

dont les deux bases opposées sont deux poligones égaux, & les autres faces des rectangles. 159

XVII. Formation des prismes droits. ibid.

XIX. Deux prismes, qui ont des bases égales, sont en même raison que leurs hauteurs. 160

XX. Deux prismes qui ont la même hauteur, sont en même raison que leurs bases. ibid.

XXI. La mesure du prisme droit est le produit de sa base par sa hauteur. 162

XXII. Les prismes obliques diffèrent des prismes droits, en ce que les faces qui sont des rectangles dans ceux-ci, sont des parallélogrammes dans ceux-là. ibid.

XXIII. Formation des prismes obliques. 163

XXIV. Les prismes obliques sont égaux aux prismes droits, lorsqu'ils ont même base & même hauteur. 164

XXV. Il en est de même des parallépipé-
bij

- des obliques , à l'égard des parallépipèdes droits.* 165
- XXXII. *En quoi consiste la similitude de deux pyramides.* 171
- XXXVII. *Les pyramides qui ont même base & même hauteur, sont égales.* 175
- XXXVIII. *Deux pyramides sont encore égales, si, ayant la même hauteur, leurs bases, sans être des polygones semblables, sont égales en superficie.* ibid.
- XXXIX. *Les pyramides qui ont même hauteur, sont entr'elles comme leurs bases.* 176
- XLII. *La solidité d'une pyramide quelconque, est le produit de sa base par le tiers de sa hauteur.* 182
- XLIII. *La pyramide est le tiers du prisme qui a même base & même hauteur.* 183
- XLV. *Le cylindre est un solide terminé par deux bases opposées & parallèles, qui sont des cercles égaux, & par un plan plié autour de leurs circonférences.* 184

DES MATIERES. xxj.

On le distingue en cylindre droit , & en cylindre oblique. ibid.

XLVI. *Formation du cylindre.* 185

XLVII. *La surface courbe d'un cylindre droit , est égale à un rectangle qui a la même hauteur , & dont la base est égale à sa circonférence.* 187

XLIX. *Les cylindres , qui ont même base & même hauteur , sont égaux en solidité.* 188

L. *La mesure d'un cylindre quelconque est le produit de sa base par sa hauteur.* ibid.

LI. *Le cone est une espèce de pyramide , dont la base est un cercle.* 189

LII. *On le distingue en cone droit , & en cone oblique.*

LIII. *La surface d'un cone droit se mesure en multipliant la moitié de son côté par la circonférence de sa base.* 190

LIV. *Le développement d'un cone est un secteur de cercle.* ibid.

LVI. *Les cones qui ont même base & même hauteur , sont égaux.* 191

LVII. *Leur mesure est le produit de la*

- base par le tiers de la hauteur.* *ibid.*
- LIX.** *Manière de mesurer la surface d'un
cone tronqué.* 193
- LX.** *La sphère est le corps dont la surface
a tous ses points également éloignés du
centre.* 194
- LXV.** *La surface de la sphère a pour me-
sure le produit de son diamètre, par la
circonférence de son grand cercle.* 202
- LXVI.** *Ce que c'est qu'un segment de
sphère.* *ibid.*
Comment on mesure sa surface. *ibid.*
- LXVII.** *La surface de la sphère est égale
à celle du cylindre circonscrit.* 203
- LXVIII.** *Les tranches du cylindre & de
sphère ont la même superficie.* *ibid.*
- LXIX.** *La surface de la sphère est égale
à quatre fois celle de son grand cercle.*
204
- LXX.** *La solidité de la sphère est le produit
du tiers du rayon par quatre fois l'aire
du grand cercle.* 205
- LXXI.** *La solidité de la sphère est les deux
tiers de celle du cylindre circonscrit.*
ibid.

LXXII. *Mesure de la solidité d'un segment de sphère.* 206

LXXIII. *En quoi consiste la similitude de deux corps terminés par des plans.* 207

LXXIV. *Conditions qui déterminent la similitude de deux cylindres droits.* 208

LXXV. *Celle de deux cylindres obliques.* ibid.

LXXVI. *Celle des cones.* ibid.

LXXVII. *Celle de deux cones troncqués.* 209

LXXVIII. *Les sphères, les cubes, & toutes les figures qui ne dépendent que d'une seule ligne, sont toutes semblables.* ibid.

LXXIX. *En général, les solides semblables ne diffèrent que par les échelles sur lesquelles ils sont construits.* ibid.

LXXX. *Les surfaces des solides semblables sont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues.* 210

xxiv TABLE DES MATIERES.

LXXXI. *Les surfaces des sphères sont entr'elles, comme les quarrés de leurs rayons.* 212

LXXXIII. *Les solides semblables sont entr'eux comme les cubes de leurs côtés homologues.* 214

LXXXIV. *Les sphères sont entr'elles comme les cubes de leurs rayons.* 215

Fin de la Table.





